Cvičenie 4: matematická indukcia

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

→ **Úloha 2.** Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí rovnosť

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

Ďalšie úlohy na dokazovanie súčtov nájdete v `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/udds/zbierka.pdf`, str. 10.

→ **Úloha 3.** Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo t je číslo $8^t + 6$ deliteľné siedmimi.

→ **Úloha 4.** Nech $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. Pre $k \geq 2$ položme $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (tzv. Fibonacciho postupnosť). Dokážte, že pre ľubovoľné prirodené číslo k platí

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1.$$

Úloha 5. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

→ a) $2^n \geq n - 2$,
b) $n^2 \leq 2^n$.
c) $n! > 2^n$,
d) $2n < 3^n$,
e) $3^n + 4^n \geq 5^n$,
f) $2^n \geq 20n$,
g) $3^n < n!$,
h) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

Úloha 6. Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí

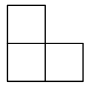
$$1! + 2! + 3! + \cdots + n! < \frac{(n+1)!}{n-1}.$$

→ **Úloha 7.** Dokážte, že n priamok v rovine má najviac $n(n-1)/2$ priesečníkov.

Úloha 8. Na stole máme v rade n mincí zľava doprava, ktoré môžu byť ľubovoľne otočené (buď lícom nadol, alebo nahor). V jednom ťahu môžeme zobrať niekoľko prvých mincí zľava a každú z nich otočiť. Dokážte, že môžeme naše ťahy voliť tak, aby sme po nejakom čase mali všetky mince otočené lícom nahor.

Úloha 9. Máme rad n políčok, ktoré sú striedavo biele a čierne. Do týchto políčok vpíšeme v nejakom poradí čísla $1, 2, \ldots, n$, každé práve raz. V jednom kroku môžeme zvoliť políčka rôznej farby a vymeniť na nich čísla. Dokážte, že bez ohľadu na to, v akom poradí čísla vpíšeme do políčok, nám stačí spraviť $2n - 2$ krokov na to, aby sme čísla usporiadali vzostupne.

→ **Úloha 10.** Máme štvorčekovú sieť rozmerov $2^n \times 2^n$ štvorčekov pre celé číslo $n \geq 1$. Jedno zo štyroch políčok v strednom štvorci 2×2 je zafarbené na čierno. Dokážte, že každú takúto štvorčekovú sieť vieme vydláždiť dlaždicami v tvare triomina L (ako na obrázku) tak, že sa dlaždice nebudú prekrývať a každé políčko s výnimkou čierneho bude zakryté dlaždicou. Dlaždice vieme aj otáčať. [Riešenie]



Úloha 11. *Hanojské veže* je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a n diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť najvrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže. Po celý čas musíme dodržať pravidlo, že väčší disk nemôže byť položený na menší disk. Cieľom hlavolamu je presunúť všetky disky z jednej tyče na druhú tyč. Dokážte, že tento hlavolam možno vyriešiť pomocou $2^n - 1$ ťahov.

Ďalšie úlohy na precvičovanie

Úloha 12. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

a) $3 \mid n^3 - n$,

b) $5 \mid n^5 - n$,

c) $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$,

d) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Úloha 13. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

a) $n! > 2^n$,

b) $2n < 3^n$,

c) $3^n + 4^n \geq 5^n$,

d) $2^n \geq 20n$,

e) $3^n < n!$,

f) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

Úloha 14. Dokážte, že políčka tabuľky $2^n \times 2^n$ možno zafarbiť bielou a čiernou farbou tak, že keď si zoberieme ľubovoľné dve riadky, tak sa budú na polovici miest zhodovať a na zvyšnej polovici miest líšiť.

Úloha 15. V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované -1, -2, -3, $\ldots$, pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.

Úloha 16. Pod *rozlomením* obdĺžnikovej tabuľky čokolády rozumieme jej rozdelenie (pozdĺž priamky, ktorá prechádza hranami medzi štvorčekmi) na dve obdĺžníkové tabuľky, ktoré dohromady obsahujú rovnaký počet štvorčekov ako pôvodná tabuľka. Dokážte, že každú obdĺžnikovú tabuľku s $n \in \mathbb{N}^+$ políčkami možno rozdeliť na jednotlivé štvorčeky pomocou $n-1$ rozlomení. Ako by sa zmenilo riešenie úlohy ak by bola zadaná pre tabuľku $a \times b$ políčok, kde $a, b \in \mathbb{N}^+$.

Náročnejšie úlohy

Úloha 17. Nech $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \ldots$ sú fibonacciho čísla. Dokážte, že pre ľubovoľné $n \geq 1$ platí:

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - F_1$$

Úloha 18. Nech a_1, a_2, $\ldots$, a_n je n kladných reálnych číslel. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n - 1 + \prod_{i=1}^{n} \max(1, a_i),$$

teda

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n - 1 + \max(1, a_1)\max(1, a_2)\cdots\max(1, a_n).$$

Úloha 19. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel x_1, x_2, $\ldots$, x_n so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Úloha 20. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí nerovnosť

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Úloha 21. Dokážte, že pre každé prvočíslo p a každé prirodzené číslo n platí $p \mid n^p - n$.

Úloha 22. Turnaja sa zúčastnilo n tímov. Každá (neusporiadaná) dvojica tímov odohrala práve jeden zápas. Každý zápas sa skončil výhrou niektorého tímu. Dokáže, že tímy možno zoradiť do postupnosti $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tak, že tím t_1 vyhral nad tímom t_2, tím t_2 nad t_3 a tak ďalej až tím t_{n-1} vyhral nad tímom t_n.

Úloha 23. Nech x je reálne číslo a $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokážte, že potom aj $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pre všetky prirodzené čísla n.

Riešenie úlohy ??

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Pre $n = 1$: ak je jediná minca otočená lícom nahor, skončili sme, inak ju vieme otočiť.

Nech $n \in \mathbb{N}^+$:
Indukčný predpoklad (IP): Ak máme v rade n mincí, tak ich vieme danými ťahmi otočiť všetky lícom nahor.
Dokážeme, že ak máme v rade $n + 1$ mincí, tak ich vieme tiež danými ťahmi otočiť:

1. Ak je posledná minca lícom nadol, tak otočíme všetky mince (prvých $n + 1$ zľava).
2. Teraz máme poslednú mincu otočenú lícom nahor. Podľa indukčného predpokladu vieme aj prvých n mincí otočiť lícom nahor – ignorovanie poslednej mince nám úseky mincí zľava nemení.

Takže vieme aj rad $n + 1$ mincí otočiť lícom nahor. Dôkaz indukciou je tak hotový.