Cvičenie 9: usporiadania

Úloha 1. Pri každú z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, dichotomická. Určite, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním. Ak áno, určte ich minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

→ a) $\emptyset$ (na množine M)

→ b) $M \times M$ (na množine M)

→ c) Relácia $\mid$ na $\mathbb{Z}$, kde $a \mid b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$

→ d) Relácia $\mid$ na $\mathbb{N} - \{1\}$, kde $a \mid b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$

→ e) $S_1 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a + b \leq c + d\}$

→ f) $S_2 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a + b < c + d\}$

→ g) $S_3 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a + b < c + d \vee (a,b) = (c,d)\}$

→ h) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 7a \mid b \vee a = b\}$

i) $R = \{(A,B) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M);\ A \subseteq B\}$

j) $\preceq\ = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb)\}$ [Riešenie]

→ **Úloha 2.** Nájdite príklad usporiadaní R a S na rovnakej množine M, aby relácie

a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}?

boli / neboli usporiadania. V prípade, že taká voľba R, S neexistuje, dokážte to.

Úloha 3. Nech A, $I \neq \emptyset$ sú množiny a nech pre každé $i \in I$ je φ_i usporiadanie množiny A. Dokážte, že potom aj $\bigcap_{i \in I} \varphi_i$ je usporiadanie množiny A. Čo ak sú φ_i úplné usporiadania?

Poznámka. $\bigcap_{i \in I} \varphi_i = \{x;\ (\forall i \in I)(x \in \varphi_i)\}$

Úloha 4. Nech φ, τ sú dva rozklady na množine $X \neq \emptyset$. Hovoríme, že $\varphi \leq \tau$ (alebo, že rozklad φ je menší alebo rovný ako τ), ak ku každej množine $M \in \varphi$ existuje taká množina $P \in \tau$, že $M \subseteq P$. Dokážte, že $\leq$ je usporiadanie systému všetkých rozkladov množiny M.

→ **Úloha 5.** Pre zadané nezáporné celé čísla m, n nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať n maximálnych a m minimálnych prvkov.

Úloha 6. Možno na množine $\mathbb{N}^2$ definovať úplné usporiadanie?

Úloha 7. Nech M je množina takých podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, 20\}$, ktoré obsahujú len po dvoch nesúdeliteľné čísla, teda

$$M = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, 20\});\ (\forall a, b \in X)(a \neq b \Rightarrow \mathrm{NSD}(a,b) = 1\}.$$

Dokážte, že $\subseteq$ je usporiadaním na množine M. Nech A, B sú dva maximálne prvky. Musí nutne platiť, že $|A| = |B|$, teda, že A a B majú rovnaký počet prvkov?

Úloha 8. Pre neprázdnu množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ označuje $\max A$ najväčší prvok množiny A (vzhľadom na klasické usporiadanie $\leq$). Nech $M = \{n \in \mathbb{N};\ 0 \leq n \leq 47\}$ a nech

$$R = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\});\ \max A < \max B \vee A = B\}.$$

Dokážte, že R je usporiadaním na množine $\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}$ a nájdite všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich nájdených prvkov dokážte.