

Cvičenie 11 a 12: Mohutnosti

Úloha 1. Nájdite bijekciu medzi množinami:

- a) $(0, 1)$ a $\langle 0, 1 \rangle$
- b) polkružnica bez krajných bodov a priamka
- c) štvorec a kruh
- d) polkružnica s krajnými bodmi a priamka

→ **Úloha 2.** Ktoré z množín \mathbb{Z} , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, \mathbb{Q} a \mathbb{R} sú spočítateľné?

Úloha 3. Je množina všetkých konečných postupností núl a jednotiek spočítateľná? Ak áno, nájdite bijekciu do \mathbb{N} .

Úloha 4. Je množina všetkých slov (teda konečných postupností) pozostávajúcich z malých písmen anglickej abecedy spočítateľná? Ak áno, nájdite bijekciu do \mathbb{N} .

Úloha 5. Rozhodnite, či nasledovné množiny sú spočítateľné. Je ich mohutnosť rovná mohutnosti \mathbb{N} alebo \mathbb{R} ?

- a) množina konečných podmnožín prirodzených čísel
- b) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- c) množina konečných postupností prirodzených čísel (\mathbb{N}^*)
- d) množina nekonečných postupností prirodzených čísel ($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$)
- e) množina všetkých nekonečných nerastúcich postupností prirodzených čísel [Riešenie]
- f) množina všetkých nekonečných neklesajúcich postupností prirodzených čísel [Riešenie]
- g) množina algebraických čísel, teda takých čísel, ktoré sú koreňmi nejakého mnohočlena s celočíselnými koeficientmi (napr. $4/17$, $\sqrt{2}$, i)
- h) množina všetkých injekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- i) množina všetkých surjekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- j) množina všetkých bijekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- k) množina všetkých involúcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (involúcia je také zobrazenie f , pre ktoré platí $f \circ f = id$).
- l) ľubovoľná množina navzájom disjunktných otvorených intervalov
- m) ľubovoľná množina navzájom disjunktných gúľ v priestore
- **Úloha 6.** Sú nasledovné množiny spočítateľné?
 - a) množina všetkých programov C++
 - b) množina všetkých problémov v informatike (v tejto úlohe si treba nejakو rozumne definovať, čo je to problém)

Úloha 7. Vieme do počítača uložiť hocijaké reálne číslo? Predpokladajte, že počítač má ľubovoľne veľkú, avšak konečnú pamäť. (Např. za týchto predpokladov vieme uložiť ľubovoľné prirodzené číslo např. do premennej typu `string`. Premenné typov `int` či `double` však majú obmedzený rozsah a nevieme do nich ani ukladať iracionálne čísla.)

Úloha 8. Porovnajte mohutnosti nasledovných množín:

- a) \mathbb{C} a \mathbb{R}
- b) \mathbb{R} a $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (množina funkcií $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
- c) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- d) množina všetkých rastúcich funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a množina všetkých klesajúcich funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- e) (*) množina všetkých rastúcich funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Úloha 9. Dokážte, že kardinálnych čísel je nekonečne veľa

Úloha 10. Dokážte, že množina je nekonečná vtedy a len vtedy, keď je ekvivalentná niektorej svojej vlastnej podmnožine.