Cvičenie 13: Kardinálne čísla

Úloha 1. Nech A, B, C, D sú množiny, pre ktoré platí $|A| = |B|$ a $|C| = |D|$. Dokážte, že platí

a) $A \cap C = \emptyset \wedge B \cap D = \emptyset \Rightarrow |A \cup C| = |B \cup D|$

$\rightarrow$ b) $|A \times C| = |B \times D|$

c) $|A^C| = |B^D|$

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľné kardinálne čísla κ, κ_1, κ_2, λ, λ_1, λ_2 platí

a) Ak $\kappa_1 \leq \lambda_1$ a $\kappa_2 \leq \lambda_2$, tak $\kappa_1 + \kappa_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$

b) Ak $\kappa_1 \leq \lambda_1$ a $\kappa_2 \leq \lambda_2$, tak $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \leq \lambda_1 \cdot \lambda_2$

c) $\kappa \leq \kappa + \lambda$ pre $\lambda \geq 0$

d) $\kappa \leq \kappa \cdot \lambda$ pre $\lambda \geq 1$ $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$

e) $\kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa$

f) $\kappa \leq \kappa^\lambda$ pre $\lambda \geq 1$

g) $\lambda \leq \kappa^\lambda$ pre $\kappa \geq 2$

$\rightarrow$ h) Ak $\kappa_1 \leq \kappa_2$ a $\lambda_1 \leq \lambda_2$, tak $\kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$

i) $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$

Úloha 3. Nech $\mathcal{T}$ je množina všetkých tranzitívnych relácií na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nech $A, B \in \mathcal{T}$. Nech R je relácia na množine $\mathcal{T}$. O nasledujúcich vetách rozhodnite, či sú vždy pravdivé (**P**), vždy nepravdivé (**N**), môžu byť aj pravdivé, aj nepravdivé (**?**) alebo nie sú výrokmi (**X**).

a) $\emptyset \in \mathcal{T}$

b) $(1, 2) \in \mathcal{T}$

c) $\{(1, 2)\} \in \mathcal{T}$

d) $\{\{(1, 2)\}\} \in \mathcal{T}$

e) $\emptyset \subseteq \mathcal{T}$

f) $(1, 2) \subseteq \mathcal{T}$

g) $\{(1, 2)\} \subseteq \mathcal{T}$

h) $\{\{(1, 2)\}\} \subseteq \mathcal{T}$

i) $A \wedge B$

j) $A \cap B$

k) $A \cap B = x \in A \wedge B$

l) $A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge B$

m) $2 \in A \cup B$

n) $2 \in A \cup M$

o) $(A, B) \in R$

p) $((1, 2), (1, 2)) \in R$

q) zmeňte pravú stranu predošlého výroku, aby sme dostali **?**

r) $A \times B \subseteq R$

Úloha 4. Uvažujme reláciu

$$R = \{(a, 4 + a);\ a \in \mathbb{N}\}.$$

Určte, ako vyzerá relácia a) R^n v závislosti od $n \in \mathbb{N}$, b) relácia R^+, relácia R^*. Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 5. Nech D je relácia na X. Dokážte, že

a) Relácia $D \cup D^2 \cup D^3 \cup \ldots$ je najmenšia tranzitívna relácia na množine X obsahujúca D. (Teda, že D je *tranzitívny uzáver* D.)

b) Relácia $D^0 \cup D \cup D^2 \cup D^3 \cup \ldots$ je najmenšia reflexívna a tranzitívna relácia na množine X. (*reflexívno-tranzitívny uzáver*)

→ c) Relácia $D^{\pm} = D \cup D^{-1}$ je najmenšia symetrická relácia na X obsahujúca D, t. j. ak T je symetrická relácia na X obsahujúca D, tak $D \cup D^{-1} \subseteq T$. (*symetrický uzáver*)

d) Relácia $D \cap D^{-1}$ je najväčšia symetrická relácia na X obsiahnutá v D.

Poznámka. Pod pojmom najmenšia relácia s nejakou vlastnosťou, myslíme najmenšia vzhľadom na usporiadanie podľa inklúzie. Bližšie vysvetlenie je v úlohe c).