

2. sada domácich úloh

Termín odovzdania 19. 12. 23:59

Úloha 1. (2 body) Nech f je zobrazenie z množiny A do množiny B .

- Dokážte, že ff^{-1} je reláciou ekvivalencie na množine A .
- Uveďte príklad zobrazenia $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, pre ktoré rozklad množiny $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ indukovaný reláciou ekvivalencie ff^{-1} je

$$\{\{a, -a\}; a \in \mathbb{N}\}.$$

Správnosť časti b) stačí stručne neformálne zdôvodniť.

Pozámka. f^{-1} značí inverznú reláciu. Relácie skladáme v poradí, že ff^{-1} je naozaj reláciou na A .

Úloha 2. (2 body) Nech M je množina všetkých neprázdnych podmnožín prirodzených čísel, teda $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$. Na množine M definujeme reláciu \preceq tak, že pre každé $A, B \in M$ platí

$$A \preceq B \Leftrightarrow [A = B \vee (\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)].$$

Dokážte, že (M, \preceq) je usporiadaná množina a určte všetky jej minimálne, maximálne, najväčšie a najmenšie prvky. Správnosť nájdených prvkov dokážte.

Ak máte problémy s určením prvkov, tak za stratu najviac 0,5 bodu môžete požadované prvky určiť v prípade, keď miesto množiny M máme množinu $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) - \{\emptyset\}$.

Úloha 3. (2 body) Uvažujme nasledujúce množiny obsahujúce nekonečné postupnosti celých čísel:

- A obsahuje práve tie postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pre ktoré platí $a_n^2 + a_{n+1}^2 = 2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$;
- B obsahuje práve tie postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pre ktoré platí $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

O každej z množín A, B rozhodnite, či je spočítateľná. Vaše tvrdenia dokážte.

Pravidlá a pokyny

Úlohy spisujte samostatne. Môžete sa o nich rozprávať a môžete si poradiť. Avšak ich spísanie je už na vás. Vaše spísané riešenia si navzájom neukazujte.

Úlohy odovzdajte do termínu odovzdania jedným z dvoch spôsobov

- Ako jeden pdf súbor** cez rozhranie Microsoft Teams. V tomto rozhraní vám budú úlohy opravené a obodované s príp. komentárom, v čom ste mali chyby. **Nezabudnite stlačiť tlačidlo Turn in / odovzdať.** (preferovaný spôsob)
- Osobne na papieri komukoľvek z cvičiacich. Opravené riešenie vám odovzdáme na cvičeniach. Rátajte však s organizačnými komplikáciami (nemusíme byť v termín odovzdania na fakulte, opravenie môže dlhšie trvať).

Riešenie každej úlohy musí byť matematicky korektné a úplné vrátane dôkazov. Do riešenia zahrňte aj príslušné slovné komentáre, aby bolo jasné, čo v riešení robíte.

Ak máte k úlohe akékoľvek otázky alebo potrebujete pomoc, kontaktujte vášho cvičiaceho.