# Riešenia 2. sady domácich úloh

## Úloha 2

Máme 3 tyče označené $A$, $B$, $C$ a $2n$ diskov, ktoré sú všetky umiestnené na tyči $A$ a v poradí zhora nadol sú očíslované $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$. V jednom ťahu môžeme vziať vrchný disk z ľubovoľnej tyče a umiestniť ho na vrch ľubovoľnej inej tyče, avšak nesmieme pritom položiť disk s väčším číslom na disk s menším číslom. (Disky s rovnakými číslami na seba môžeme ukladať.) Dokáže, že pomocou $2^{n+1} - 2$ ťahov vieme všetky disky z tyče $A$ premiestniť na tyč $B$.
**Bonus.** *(1 bod)* Napíšte program, ktorý zo vstupu načíta číslo $n$ a vypíše postupnosť ťahov, ktorá presunie disky z tyče $A$ na tyč $B$. Každý ťah bude v samostatnom riadku, ktorý bude tvaru `XY`, ktorý znamená, že z tyče `X` presúvame disk na tyč `Y`.

Matematickou indukciou dokážeme, že $2n$ diskov vieme premiestniť z jednej tyče na druhú využitím $2^{n+1} - 2$ ťahov. Pre $n = 0$ nemáme žiadne disky, čiže na vyriešenie hlavolamu nám stačí 0 ťahov. Keďže $2^1 - 2 = 0$, tak bázu máme dokázanú.

Nech $k$ je prirodzené číslo. Prepokladajme, že $2k$ diskov $1, 1, 2, 2, \dots, k, k$ vieme premiestniť z jednej tyče na druhú na $2^{k+1} - 2$ ťahov (indukčný predpoklad). Dokážeme, že potom vieme aj $2(k+1)$ diskov $1, 1, 2, 2, \dots, k+1, k+1$ premiestniť z jednej tyče na druhú, bez ujmy na všeobecnosti z $A$ na $B$. To spravíme nasledovne:

1. Na základe indukčného predpokladu presunieme disky $1, 1, 2, 2, \dots, k, k$ z tyče $A$ na tyč $C$ pomocou $2^{k+1} - 2$ ťahov.
2. Presunieme disk jeden disk $k + 1$ z tyče $A$ na tyč $B$ a rovnako aj druhý. Vykonali sme 2 ťahy.
3. Podľa indukčného predpokladu presunieme disky $1, 1, 2, 2, \dots, k, k$ z tyče $C$ na tyč $B$ pomocou $2^{k+1} - 2$ ťahov.

Všetky vykonané ťahy sú korektné. Disky $k + 1$ nás v krokoch 1. a 3. netrápia, keďže na ne môžeme uložiť všetky ostatné. Ukázali sme tak, že vieme presunúť všetky disky z tyče $A$ na tyč $B$, pričom počet použitých ťahov je

$$(2^{k+1} - 2) + 2 + (2^{k+1} - 2) = 2 \cdot 2^{k+1} - 2 = 2^{(k+1)+1} - 2,$$

čo je presne to, čo sme chceli dokázať. Dôkaz indukciou je tak hotový.

**Poznámka.** V tomto riešení sme vlastne dokazovali silnejšie tvrdenie. Miesto presúvania diskov vyslovene z tyče $A$ na tyč $B$ sme dokazovali, že vieme presúvať medzi ľubovoľnými dvomi tyčami. To je technicky potrebné, keď chceme v indukčnom kroku využiť indukčný predpoklad na presun diskov z tyče $A$ na $C$. Ak máme v indukčnom predpoklade len presun z $A$ na $B$, tak to nemôžeme len tak použiť.

**Bonus.** Spomenutý problém je výrazný, keď sa pustíme do programovania. Matematikcká indukcia zodpovedá rekurzii v programovaní. Teda ak chceme previesť naše riešenie do programu, najpriamejšie bude napísať rekurzívnu funkciu. Ak by sme však išli programovať funkciu `hanoi(n)`, ktorá vypíše postuonosť ťahov presúvajúcu disky z $A$ na $B$, tak tú nebudeme môcť použiť na presun z $A$ na $C$. Preto si funkciu zovšeobecníme tak, že jej pridáme argumenty `start`, `goal`, určujúce z ktorej tyče na ktorú chceme disky presúvať. Takto vieme pridať aj argument `mid` pre zvyšnú tyč – síce sa dá jednoznačne určiť z hodnôt `start`, `goal`, ale je pohodlnejšie sa toho ušetriť.

Budeme teda programovať funkciu `hanoi(n, start, goal, mid)`, ktorá presunie disky $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ z tyče `start` na tyč `goal` za pomoci tyče `mid`.

```
def hanoi(n, start, goal, mid):
    if n > 0:
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z start na mid
        hanoi(n - 1, start, mid, goal)
        # Presunieme dva disky n z start na goal
        print(start + goal)
        print(start + goal)
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z mid na goal
        hanoi(n - 1, mid, goal, start)

n = int(input())
hanoi(n, 'A', 'B', 'C')
```

**Porovnanie rekurzie a matematickej indukcie.** Na tejto úlohe si môžeme pekne všimnúť súvis medzi rekurziou a matematickou indukciou. Akurát tento program nám nič nehovorí o počte ťahov. Aby sme dokázali, že spraví $2^{n+1} - 1$, tak potrebujeme už matematickú indukciu.

**Kde spraviť bázu?** V úlohe nebolo jasne zadané, pre ktoré $n$ máme tvrdenie dokazovať (či pre $n \geq 0$ alebo pre $n \geq 1$). Náš dôkaz aj program uvažuje $n \geq 0$. Všimnite si, že prípad uvažovanie 0 vôbec nie je problematické. Ak by sme nulu nechceli uvažovať, tak by sem v báze pre $n = 1$ vykonali dva priame ťahy. A program by vyzeral nasledovne:

```
def hanoi(n, start, goal, mid):
    if n == 1:
        print(start + goal)
        print(start + goal)
    else:  # Alebo if n > 1:
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z start na mid
        hanoi(n - 1, start, mid, goal)
        # Presunieme dva disky n z start na goal
        print(start + goal)
        print(start + goal)
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z mid na goal
        hanoi(n - 1, mid, goal, start)

n = int(input())
hanoi(n, 'A', 'B', 'C')
```

Dokazovanie pre $n \geq 0$ má výhodu v tom, že báza je jednoduchšia. Aj program je o niečo stručnejší.

## Úloha 3

Zistite, či pre ľubovoľné množiny $A$, $B$, $C$ platí:
a) $\mathcal{P}(A - C) - \mathcal{P}(B - C) \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B \cup C)$,

b) $\mathcal{P}(A - C) - \mathcal{P}(B - C) \supseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B \cup C)$.
Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenia dokážte z definície.

**a)** Dokážeme, že tvrdenie platí. Nech

$$X \in \mathcal{P}(A - C) - \mathcal{P}(B - C),$$

Potom platí

$$X \in \mathcal{P}(A - C) \wedge X \notin \mathcal{P}(B - C)$$

a platí aj

$$X \subseteq A - C \wedge X \nsubseteq B - C.$$

Z toho dostávame, že nám platí

$$X \subseteq A - C, \tag{1}$$
$$X \nsubseteq B - C. \tag{2}$$

Teraz dokážeme, že platí $X \subseteq A$. To platí z toho dôvodu, že pre každý prvok $a \in X$ platí kvôli (1), že $a \in A - C$ a z toho zas vyplýva, že $a \in A$. Teda $(\forall a)(a \in X \Rightarrow a \in A)$, čo znamená, že

$$X \subseteq A. \tag{3}$$

Teraz ešte ukážeme, že platí aj $X \nsubseteq B \cup C$. Tvrdenie (2) znamená, že

$$(\exists b)(b \in X \wedge b \notin B - C).$$

(Teda existuje prvok, ktorý je v $X$ a nie je v $B - C$.) Teraz odstránime existenčný kvantifikátor tým, že si tento prvok pomenujeme $b$ (taký symbol ešte nemáme použitý) a vieme tak, že nám platí

$$\begin{gathered} b \in X \wedge b \notin B - C \\ \Downarrow \\ b \in X \wedge \neg(b \in B \wedge b \notin C) \\ \Downarrow \\ b \in X \wedge (b \notin B \vee b \in C) \end{gathered} \tag{4}$$

Keďže $b \in X$ a $X \subseteq A - C$ (1), tak platí aj $b \in A - C$, teda platí

$$b \in A, \tag{5}$$
$$b \notin C. \tag{6}$$

Keďže z (4) vyplýva, že platí $b \notin b \vee b \in C$ a akurát sme ukázali, že platí $b \notin C$ (6), tak musí platiť

$$b \notin B. \tag{7}$$

Tým pádom o prvku $b$ vieme, že $b \in X \land (b \notin B \land b \notin C)$, čiže

$$b \in X \land b \notin (B \cup C).$$

Čiže existuje prvok (je to naše $b$), ktorý je v $X$ a nie je v $B \cup C$. To znamená, že

$$X \not\subseteq B \cup C. \tag{8}$$

Teraz už len spojíme (3) a (8), teda máme

$$\begin{align} X \subseteq A \land X \not\subseteq B \cup C \tag{9}\\ \Downarrow \tag{10}\\ X \in \mathcal{P}(A) \land X \notin \mathcal{P}(B \cup C) \tag{11}\\ \Downarrow \tag{12}\\ X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B \cup C) \tag{13} \end{align}$$

**b)** Tvrdenie neplatí, ukážeme protipríklad.

Nech

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}, C = \{1, 3\}$$

Potom

$$\begin{align} P(A) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \tag{14}\\ P(B) &= \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\} \tag{15}\\ P(C) &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\} \tag{16}\\ & \tag{17} \end{align}$$

Vyhodnotme si najskôr pravú stranu.

$$\begin{align} P(B \cup C) &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\} \tag{18}\\ &\Downarrow \tag{19}\\ P(A) - P(B \cup C) &= \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \tag{20} \end{align}$$

Následne si vyhodnoťme ľavú stranu.

$$\begin{align} P(A - C) &= \{\emptyset, \{2\}\} \tag{21}\\ P(B - C) &= \{\emptyset, \{4\}\} \tag{22}\\ &\Downarrow \tag{23}\\ P(A - C) - P(B - C) &= \{\{2\}\} \tag{24} \end{align}$$

Aby platilo tvrdenie:

$$\mathcal{P}(A - C) - \mathcal{P}(B - C) \supseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B \cup C)$$

Musí platiť, pre ľubovoľné $A, B, C$, avšak pre nami zvolené $A, B, C$ dostávame:

$$\{\{2\}\} \not\supseteq \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

takže tvrdenie b) neplatí.