

Cvičenie 3: Základné enumeračné pravidlá

Táto sada obsahuje pomerne jednoduché úlohy. Väčšinu z nich by mal byť schopný vyriešiť absolvent základnej školy, čo ale nemusí byť realita. Jednoduché úlohy tu však nie sú zaradené iba preto, aby sme si na nich zopakovali základnoškolské vedomosti. Enumeračné úlohy sa totiž dajú riešiť rôznymi spôsobmi, ktoré vyžadujú rôzne úrovne matematického myslenia:

1. **Systematický výpis všetkých možností.** Tento spôsob je dôležitý, nakoľko na ňom vieme názorne ilustrovať kombinatorické pravidlá. Pokiaľ ste takto úlohy neriešili, silno odporúčame si nejaké takto vyskúšať. Zdôrazňujeme, že aby bolo možné považovať tento postup za úplné riešenie, je dôležitá jeho systematickosť. Tou vieme odôvodniť, že sme každú možnosť započítali práve raz.
2. **Neformálne riešenie pomocou kombinatorických úvah.**
3. **Formálne riešenie.** Ide o riešenie pomocou formálneho jazyka, kedy musí byť presne jasné s akými štruktúrami pracujeme a aké tvrdenia využívame. Štandardne využívame pritom množiny a iné štruktúry, ktoré sú z nich vybudované (o nich sme sa učili na Úvode do diskretných štruktúr).
4. **Riešenie pomocou programovania.** Ide o variantu systematického výpisu, avšak toto riešenie vie obsahovať aj prvky formálneho riešenia. Programovací jazyk totiž tiež možno považovať za istý formalizmus – má totiž jasné pravidlá, ako jeho programy vyzerajú a ako sú interpretované. Vhodne napísaný program dokonca zodpovedá aj formálnemu riešeniu. Navyše takéto riešenie má peknú výhodu – program vieme spustiť a máme hmatateľne vypísané všetky možnosti.

Práve na týchto jednoduchých úlohách si ilustrujeme posledné dva spôsoby riešenia, ktoré sú práve na úrovni vysokoškolskej matematiky.

Príslušná teória k týmto úlohám sa nachádza za sadou úloh.

→ **Úloha 1.** K dispozícii máme cifry 2, 3, 4. Koľko z nich vieme zložiť

- a) dvojciferných čísiel,
- b) trojciferných čísiel,
- c) štvorciferných čísiel,
- d) párnych trojciferných čísel.

Úloha 2. Medveď si môže dať na obed buď jednu z 50 (rozlíšiteľných) oviec alebo jedného z troch (rozlíšiteľných) valachov (nie však oboje naraz). Z koľkých možností si môže vybrať dohromady?

Úloha 3. Pod grúňom sa pasú dve čriedy o n ovciach a jedna črieda o m ovciach (všetky ovce sú navzájom rozlíšiteľné). Koľko možností má medveď, keď chce zjesť práve jednu ovcu?

Úloha 4. Hádzeme troma kockami rôznych farieb. Koľko môže padnúť rôznych trojíc čísel?

Úloha 5. Najnovší model lopaty vyrábajú v šiestich výkonnostných a v troch energetických kategóriách, pričom ku každej z výkonnostných kategórií je k dispozícii každá z energetických kategórií. Koľko variantov je na trhu celkovo?

→ **Úloha 6.** Koľko písmen má Morseova abeceda, ktorá používa symboly bodku a čiarku v jedno- až štvormiestnych skupinách, pričom každý symbol sa môže opakovať?

Úloha 7. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel.

Úloha 8. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry a najviac päť cifier.

→ **Úloha 9.** Nájdite počet všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry.

Úloha 10. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry, najviac päť cifier a rovnaké posledné dve cifry.

Úloha 11. Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b ?

Úloha 12. Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa buď začínajú na a , alebo sa súčasne nezačínajú na a a končia na c ?

→ **Úloha 13.** Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b ?

Úloha 14. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú každé z písmen aspoň raz?

Úloha 15. Koľko je všetkých 4-znakových slov zložených z písmen a, b, c, d , ktoré obsahujú práve jedno písmeno a .

→ **Úloha 16.** Koľko je všetkých 4-znakových slov zložených z písmen a, b, c, d , ktoré obsahujú aspoň jedno písmeno a .

→ **Úloha 17.** Nájdite počet 3-ciferných čísel, ktoré možno zložiť z cifier 1, 2, 3, 4. Cifry nemôžeme používať opakovane.

→ **Úloha 18.** Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne.

→ **Úloha 19.** Koľko existuje 4-ciferných čísel zložených z cifier z množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$, v ktorých sa nenachádzajú dve rovnaké cifry bezprostredne za sebou?

→ **Úloha 20.** S pripomienkami k zákonu chce v parlamente vystúpiť 6 poslancov A, B, C, D, E, F.

a) Koľko je možných poradí vystúpení?

b) Koľko je poradí, v ktorých vystupuje A ihneď po E?

c) Koľko je poradí, v ktorých vystupuje A po E?

→ **Úloha 21.** Nájdite počet kladných deliteľov čísla 120.

Úloha 22. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^8$.

→ **Úloha 23.** Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6$.

Úloha 24. Pod grúňom je 10 salašov a na každom majú 50 (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

Úloha 25. Pod grúňom je n salašov a na každom majú m (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

→ **Úloha 26.** Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$?

Úloha 27. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b ?

→ **Úloha 28.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa končia trojicou rovnakých písmen?

- **Úloha 29.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú práve jeden výskyt písmena c ?
- Úloha 30.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel.
- Úloha 31.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X ?
- Úloha 32.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré začínajú párnym číslom?
- Úloha 33.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré začínajú nepárnym číslom?
- Úloha 34.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré majú všetky prvky rôzne?
- Úloha 35.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?
- Úloha 36.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých aspoň 97-prvkových postupností prvkov z množiny X , ktoré majú všetky prvky rôzne?
- **Úloha 37.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa nekončia trojicou rovnakých písmen?
- Úloha 38.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré neobsahujú práve jeden výskyt písmena c ?
- **Úloha 39.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n -prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré nobsahujú aspoň jeden výskyt písmena c ?
- Úloha 40.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 4.
- Úloha 41.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 5.
- Úloha 42.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n -ciferných čísel, ktoré obsahujú aspoň jednu z cifier $\{1, 3, 7\}$.
- Úloha 43.** Určte, koľko je všetkých 3-ciferných čísel, ktorých prvá cifra (na mieste stoviek) je deliteľná tromi, druhá cifra je deliteľná štyrmi a posledná cifra je deliteľná piatimi.
- Úloha 44.** Určte, koľko je všetkých 6-ciferných čísel zložených z cifier 1 a 7, ktoré neobsahujú tri jednotky po sebe.
- Úloha 45.** (*) Vyriešte predošlú úlohu pre 20-ciferné čísla.
- Úloha 46.** (*) Napíšte program, ktorý vypíše riešenie úlohy 44 pre n -ciferné čísla.
- Úloha 47.** (*) Koľkými spôsobmi možno vydláždiť obdĺžnik 3×10 dlaždicami tvaru obdĺžnika rozmerov 1×2 ?
- Úloha 48.** (*) Územie Kocúrkova má tvar pravidelného n -uholníka. Starosta Kocúrkova chce rozdeliť jeho územie na trojuholníky, ktoré majú vrcholy vo vrcholoch n -uholníka a aspoň jednu spoločnú stranu s n -uholníkom. Koľkými spôsobmi to vie urobiť?
- Úloha 49.** (*) Luxusko si objednal ku svojim meninám sadu n luxusných závaží s hmotnosťami $1! \text{ kg}, 2! \text{ kg}, 3! \text{ kg}, \dots, n! \text{ kg}$. Koľko rôznych hmotností vie Luxusko pomocou nich odvážiť na rovnoramenných váhach? Závažia môže dávať na obe strany.

Ako formálne riešiť kombinatorické úlohy

Veta 1 (Pravidlo súčtu). *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú po dvoch disjunktné konečné množiny. Potom*

$$|X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|,$$

resp. stručnejšie zapísané

$$\left| \bigcup_{k=1}^n X_k \right| = \sum_{k=1}^n |X_k|.$$

Veta 2 (Pravidlo súčinu). *Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ a $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú ľubovoľné konečné množiny. Potom*

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n| = \prod_{k=1}^n |X_k|.$$

Veta 3 (Pravidlo rozdielu). *Nech A, U sú ľubovoľné konečné množiny také, že $A \subseteq U$. Potom*

$$|U \setminus A| = |U| - |A|.$$

Pravidlo súčinu možno aj zovšeobecniť na silnejšiu verziu, kedy dovoľíme, neformálne povedané, aby množiny, z ktorých vyberáme prvky záviseli od výberu predošlých prvkov. Dôležité je len to, aby sme zakaždým na daný prvok výslednej usporiadanej n -tice mali rovnaký počet možností. Zapísať pravidlo súčinu riadne formálne je značne komplikované, preto v jeho formulácii od tohto upustíme. Príklad jeho použitia nájdete na konci dokumentu ako riešenie úlohy 18.

Veta 4 (Zovšeobecnené pravidlo súčinu, neformálna verzia). *Nech X je konečná množina. Nech $A \subseteq X^k$, $k \geq 2$, je podmnožina karteziánskeho súčinu X^k , ktoré obsahuje všetky také usporiadané k -tice $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ spĺňajúce podmienky:*

- (1) *prvok x_1 je možné z množiny X vybrať n_1 spôsobmi;*
- (2) *pre každé $i \in \{1, \dots, k-1\}$, po akomkoľvek výbere usporiadanej i -tice $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ je možné prvok x_{i+1} vybrať vždy n_{i+1} spôsobmi.*

Potom $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Ak by sme chceli vetu 4 formulovať úplne formálne, tak to vieme spraviť na štýl toho, ako vieme zapísať množinu všetkých 4-ciferných čísel, v ktorých sa cifry neopakujú:

$$\{(a, b, c, d); a \in C - \{0\}, b \in C - \{a\}, c \in C - \{a, b\}, d \in C - \{a, b, c\}\},$$

kde $C = \{0, 1, \dots, 9\}$ je množina čísel. Prvky a, b, c, d tak neberieme z pevných množín ako pri pravidle súčinu, ale volíme ich z množiny, ktorá je určená voľbou predošlých prvkov. Napr. prvok c vyberáme z množiny $C - \{a, b\}$, ktorej konkrétna podoba závisí od výberu a, b , avšak nie od výberu d . (Pripomíname, že je dôležité, že jej počet prvkov nezávisí na tom, aké a, b zvolíme.) Množinu typu $C - \{a, b\}$ formálne vyjadríme ako množinu $M_{a,b}$, ktorá môže byť pre rôzne voľby a, b iná.

Veta 5 (Zovšeobecnené pravidlo súčinu, formálna verzia). *Nech X, M sú konečné množiny, $k \geq 2$ a nech pre každú usporiadanú i -ticiu $(x_1, x_2, \dots, x_i) \in X^i$, kde $i \in \{1, \dots, k-1\}$, máme množinu $M_{x_1, \dots, x_i}$, pričom sú splnené podmienky:*

- (1) $|M| = n_1$;
- (2) *pre každé $i \in \{1, \dots, k-1\}$ a každú usporiadanú i -ticiu $(x_1, x_2, \dots, x_i) \in X^i$ platí*
 $|M_{x_1, \dots, x_i}| = n_{i+1}.$

Potom

$$|\{(x_1, x_2, \dots, x_k); x_1 \in M, (\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\})(x_{i+1} \in M_{x_1, \dots, x_i})\}| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Použitie tejto vety bude jasnejšie na príkladoch nižšie.

Zovšeobecnené pravidlo súčino vieme použiť aj v prípade, ak počítame prvky karteziánskeho súčinu rôznych množín $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Vtedy nám stačí zvoliť vo vete $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$.

Úloha 50. Dokážte pravidlo rozdielu (vetu 3). Ľahko ukážeme, že platí $U = U \setminus A \cup A$ a že množiny $U \setminus A$, A sú disjunktné. Potom len použijeme pravidlo súčtu a upravíme.

Rišenie úlohy 13

Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b ?

Usporiadané päťice si rozdelíme na niekoľko množín podľa toho, na ktorej pozícii sa objavujú po sebe idúce výskyty b . Pre stručnosť si označme $Z = \{a, c, d\}$.

- **1. a 2. pozícia:** množinu takýchto 5-tíc vieme vyjadriť ako $\{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \times Z$.
- **2. a 3. pozícia:** vtedy máme množinu $Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \times Z$.
- **3. a 4. pozícia:** vtedy máme množinu $Z \times Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z$.
- **4. a 5. pozícia:** vtedy máme množinu $Z \times Z \times Z \times \{b\} \times \{b\}$.

Množinu všetkých riešení vieme tak vyjadriť ako

$$\{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \times Z \cup Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \cup Z \times Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \cup Z \times Z \times Z \times \{b\} \times \{b\}.$$

Všetky tieto štyri množiny sú navzájom disjunktné, lebo sa líšia v pozícii b -čok. Preto podľa pravidla súčtu jej veľkosť je rovná

$$|\{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \times Z| + |Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \times Z| + |Z \times Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z| + |Z \times Z \times Z \times \{b\} \times \{b\}|.$$

To je zas podľa pravidla súčino rovné

$$\begin{aligned} & |\{b\}| \cdot |\{b\}| \cdot |Z| \cdot |Z| \cdot |Z| + |Z| \cdot |\{b\}| \cdot |\{b\}| \cdot |Z| \cdot |Z| + \\ & + |Z| \cdot |Z| \cdot |\{b\}| \cdot |\{b\}| \cdot |Z| + |Z| \cdot |Z| \cdot |Z| \cdot |\{b\}| \cdot |\{b\}| = \\ & 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 4 \cdot 3^3. \end{aligned}$$

Nie všetky kombinatorické úlohy sú však o usporiadaných n -ticiach, že ich pekne vieme dostať z pravidla súčino – napr. keď máme počítať nejaké čísla. Hoci považovať čísla za usporiadané n -tice nie je veľká nepresnosť a sme ju ochotní tolerovať. Čisto formálne riešenie by vyzeralo takto.

Rišenie úlohy 9

Nájdite počet všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry.

Množinu cifier si označme $C = \{0, 1, \dots, 9\}$ a množinu všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry, si označme A . Zostrojme množinu

$$B = (C - \{0\}) \times C \times C \times C,$$

ktorá má podľa pravidla súčino veľkosť $|B| = |C - \{0\}| \cdot |C| \cdot |C| \cdot |C| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$. Zostrojme zobrazenie $f: B \rightarrow A$, ktoré usporiadanej 4-ici (a, b, c, d) priradí číslo v dekadickom zápise $abcd\bar{d}$. Toto zobrazenie je zjavne bijekcia, preto $|A| = |B| = 9\,000$.

Naša zostrojená množina B „reprezentuje“ hľadané 5-ciferné čísla, lebo každé také číslo je jednoznačne určené usporiadanou štvoricou cifier, ktoré predstavujú cifry na prvých štyroch miestach zľava – posledná cifra je určená predposlednou. Tento fakt vieme formálne vyjadriť práve nájdením bijekcie.

Všimnime si, že z takéhoto formálneho riešenia, vieme pomerne priamočiaro zostrojiť program, ktorý nám všetky možnosti vypíše. Karteziánsky súčin vieme ľahko reprezentovať vnorenými `for` cyklami. Pre prehľadnosť si pre rozdiel množín definujeme vlastnú funkciu `difference`.

```
#include <iostream>
#include <set>

using namespace std;

set<int> difference(const set<int> &A, const set<int> &B) {
    set<int> C;
    for (int a : A) {
        if (B.count(a) == 0) {
            C.insert(a);
        }
    }
    return C;
}

void uloha_3_8() {
    set<int> C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
    int pocet = 0;
    for (int a : difference(C, {0})) {
        for (int b : C) {
            for (int c : C) {
                for (int d : C) {
                    cout << a << b << c << d << endl;
                    pocet++;
                }
            }
        }
    }
    cout << pocet << " moznosti\n";
}

int main() {
    uloha_3_8();
    return 0;
}
```

V mnohých zložitejších úlohách nám však pravidlo súčinu stačiť nebude. Takmer vo väčšine kombinatorických úloh, s ktorými sa stretneme, budeme používať zovšeobecnené pravidlo súčinu. Zápis jeho použitia môže vyzeráť takto.

Riešenie úlohy 18

Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne.

Nech A je množina čísel zo zadania a $C = \{0, 1, \dots, 9\}$ je množina cifier. Nech B je množina usporiadaných štvoríc (a, b, c, d) , kde

- $a \in C - \{0\}$, $|C - \{0\}| = 9$;
- $b \in C - \{a\}$, $|C - \{a\}| = 9$ pre každú voľbu a ;

- $c \in C - \{a, b\}$, $|C - \{a, b\}| = 8$ pre každú voľbu a, b ;
- $d \in C - \{a, b, c\}$, $|C - \{a, b, c\}| = 7$ pre každú voľbu a, b, c .

Podľa zovšeobecneného pravidla súčiny $|B| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. Zobrazenie $f: A \rightarrow B$, $f((a, b, c, d)) = \overline{abcd}$ je zjavne bijekcia. Preto $|A| = |B| = 4536$.

Na základe tohto riešenia by program vyzeral nasledovne:

```
void uloha_3_17() {
    set<int> C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
    int pocet = 0;
    for (int a : difference(C, {0})) {
        for (int b : difference(C, {a})) {
            for (int c : difference(C, {a, b})) {
                for (int d : difference(C, {a, b, c})) {
                    cout << a << b << c << d << endl;
                    pocet++;
                }
            }
        }
    }
    cout << pocet << " moznosti\n";
}
```

Tu vidíme, že pri programovaní vlastne ani nebadateľ rozdiel medzi bežným a zovšeobecneným pravidlom súčiny.

Minimalistický zápis, ktorý sme ešte ochotní uznať ako formálne riešenie, môže vyzerať takto.

Stručné riešenie úlohy 18

Zvoľme

- $a \in C - \{0\}$: 9 možností;
- $b \in C - \{a\}$: 9 možností;
- $c \in C - \{a, b\}$: 8 možností;
- $d \in C - \{a, b, c\}$: 7 možností.

Zostrojíme číslo $\overline{abcd}$, čím máme zjavne bijekciu. Teda počet možností je $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

Hlavne vám odporúčame pomenúvať si jednotlivé voľby a na základe týchto označení na záver opísať, ako dostaneme z týchto čiastkových volieb výslednú možnosť. Hoci pri takýchto jednoduchých úlohách sa takéto riešenie dá opísať aj slovne, bez písmeniek, pri zložitejších úlohách absencia premenných vie spôsobiť nejasnosti. Tiež si treba skontrolovať, že naozaj je naše zobrazenie bijekcia – to je jedna z najčastejších chýb pri riešení.

Riešenia

Riešenia úloh sú celkom provizórne. Je možné, že obsahujú nejaké chyby, preklepy. Budem rád, pokiaľ mi každú nezrovnalosť nahlásite mailom na rajnik zavinač dcs.fmph.uniba.sk.

1.

a) $3^2 = 9$

b) $3^3 = 27$

c) $3^4 = 81$

d) $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

2. 53

3. $n + m$

4. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

5. $6 \cdot 3 = 18$

6. $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

7. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

8. $9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 = 99\,900$

9. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$

10. 9990

11. $2 \cdot 4^4 = 512$

12. $4^4 + 3 \cdot 4^3 = 448$

13. $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 108$

14. $4 \cdot (6 \cdot 10) = 240$

15. $4 \cdot 3^3 = 108$

16. $4^4 - 3^4 = 175$

17. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

18. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

19. $4 \cdot 3^4 = 324$

20. a) $6!$, b) $5!$, c) $6!/2$

21. $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

22. $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 810$

23. 13 · 7 · 7 deliteľov ($3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6 = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 7^6$)

24. 50^{10}

25. m^n

26. 4^n

27. $2 \cdot 4^{n-1}$

28. $4^{n-3} \cdot 4 = 4^{n-2}$

29. $n \cdot 3^{n-1}$

30. $9 \cdot 10^{n-1}$

31. 100^{20}

32. $50 \cdot 100^{19}$

33. $50 \cdot 100^{19}$

34. 100^{20}

35. $50 \cdot 99^{19}$

36. $100^{97} + 100^{98} + 100^{99} + 100^{100}$

37. $4^n - 4^{n-2}$

38. $4^n - n \cdot 3^{n-1}$

39. $4^n - 3^n$

40. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ (pre $n \geq 3$)

41. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-2} \cdot 2$ (pre $n \geq 2$)

42. $9 \cdot 10^{n-1} - 6 \cdot 7^{n-1}$

48. $n \cdot 2^5$

Rozdeľte si možnosti podľa miest, na ktorých máme trojuholníky, ktoré majú spoločné práve dve strany s n -uholníkom. Takto započítate každé riešenie dvakrát. [KMS 15/16-Z1-4]

49. $19 \cdot (3^{n-3} - 1)/2 + 9$

Ukážte, že s výnimkou zopár malých závaží, každé rozmiestnenie závaží nám určí jedinečnú hmotnosť, ktorú vieme odvážiť. [KMS 15/16-L3-4]