

Cvičenie 4: Štandardné kombinatorické konfigurácie

Definícia 1 (Variácie s opakovaním). Nech $A = \{1, \dots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. Variáciou s opakovaním k -tej triedy z n prvkov množiny B nazveme ľubovoľné zobrazenie $f: A \rightarrow B$, čiže prvok množiny B^A .

Veta 1. Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním k -tej triedy z n prvkov množiny B je n^k .

Definícia 2 (Variácie bez opakovania). Nech $A = \{1, \dots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. Variáciou bez opakovania k -tej triedy z n prvkov množiny B nazveme ľubovoľné injektívne zobrazenie $f: A \rightarrow B$.

Veta 2. Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií bez opakovania k -tej triedy z n prvkov množiny B je

$$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

Definícia 3 (Permutácie bez opakovania). Nech $A = \{1, \dots, n\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. Permutáciou množiny B nazveme ľubovoľné bijektívne zobrazenie $f: A \rightarrow B$, čiže variáciu bez opakovania n -tej triedy z n -prvkov množiny B .

Veta 3. Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Počet permutácií množiny B je

$$n! := n^{\underline{n}} := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (n-k).$$

Nech A je konečná množina. Zjavne existuje bijekcia medzi podmnožinami množiny A a zobrazeniami $f: A \rightarrow \{0, 1\}$: ku každej podmnožine $B \subseteq A$ totiž môžeme definovať jej *charakteristické zobrazenie* $\chi_B: A \rightarrow \{0, 1\}$ ako

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in B \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad \text{pre všetky } x \in A$$

a naopak, ku každému zobrazeniu $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ vieme definovať jeho *nosič* ako množinu

$$\text{supp}(f) = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}.$$

Lahko vidieť, že obe priradenia $B \mapsto \chi_B$ a $f \mapsto \text{supp}(f)$ sú injektívne (v skutočnosti ide dokonca o navzájom inverzné bijekcie). Podmnožín konečnej množiny A je teda presne toľko, čo prvkov množiny $\{0, 1\}^A$. Z pravidiel mocnenia potom dostávame:

Dôsledok 1. Nech A je ľubovoľná konečná množina taká, že $|A| = n$. Potom

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^A| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Z tohto dôvodu sa potenčná množina $\mathcal{P}(A)$ často zvykne označovať aj ako 2^A .

Definícia 4 (Kombinácie bez opakovania). Nech B je konečná množina taká, že $|B| = n$ a nech $k \in \mathbb{N}$. Kombináciou bez opakovania k -tej triedy z n prvkov množiny B nazveme ľubovoľnú k -prvkovú podmnožinu množiny B .

Množina všetkých k -prvkových podmnožín konečnej množiny B – čiže množina všetkých kombinácií k -tej triedy z B – sa zvykne označovať ako $\mathcal{P}_k(B)$ alebo ako $\binom{B}{k}$.

Veta 4. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet kombinácií bez opakovania k -tej triedy z n prvkov množiny B je*

$$|\mathcal{P}_k(B)| = \left| \binom{B}{k} \right| = \binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Ak navyše $k \leq n$, tak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pri niektorých úlohách je výhodné započítať možnosti viackrát. Pokiaľ každú možnosť započítame rovnako veľa krát, tak predelením príslušným číslom dostaneme správny výsledok. Jedna z formálnych podôb tohto pravidla je nasledovná.

Veta 5 (Pravidlo delenia). *Nech A a B sú množiny, k je kladné celé číslo a nech f je k -na-1 zobrazenie $A \rightarrow B$. Potom*

$$|B| = \frac{|A|}{k}.$$

Zobrazenie $f: A \rightarrow B$ je k -na-1 zobrazenie, angl. *k-to-1 correspondence*, ak platí $|f^{-1}(\{b\})| = k$ pre každý prvok $b \in B$ (teda na každý prvok $b \in B$ sa zobrazí rovnaký počet prvkov množiny A). V tejto reči je teda bijekcia 1-to-1 correspondence.

→ **Úloha 1.** V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Koľko existuje rôznych ťahov, ak záleží na poradí vytiahnutých čísel? Čísla sa po vytiahnutí nevracajú do osudia.

→ **Úloha 2.** Študent má k dispozícii 6 povinne voliteľných predmetov. Koľkými spôsobmi si môže vybrať a) dva, b) tri predmety, ktoré si zapíše? Vypíšte všetky možnosti.

Úloha 3. Máme $n \geq 7$ kníh, ale len 7 voľných miest na poličke. Koľko máme možností na uloženie kníh na prázdne miesta?

Úloha 4. Koľko prvkov obsahuje množina X taká, že počet variácií bez opakovania druhej triedy z prvkov X je 240?

Úloha 5. Máme množinu, ktorá má x prvkov. Ak sa počet jej prvkov zväčší o 2, tak počet variácií bez opakovania tretej triedy z jej prvkov sa zväčší o 384. Nájdite x .

→ **Úloha 6.** Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo práve jedno čierne políčko?

Úloha 7. V hre Mates sa ťahá 5 čísel z 35. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých čísel?

→ **Úloha 8.** V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Z nich je šesť čísel riadnych a jedno dodatkové. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých riadnych čísel, ale záleží na rozdieli medzi riadnym a dodatkovým číslom?

→ **Úloha 9.** Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú rovnaký počet oboch písmen?

Úloha 10. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a ?

Úloha 11. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a ?

→ **Úloha 12.** Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 6 alebo 7 výskytov písmena a ?

Úloha 13. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku párny počet bielych políčok?

→ **Úloha 14.** Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $2n \times 2n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku bolo rovnako veľa bielych a čiernych políčok?

Úloha 15. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku aj stĺpci párny počet bielych políčok?

→ **Úloha 16.** Vo firme je 8 zamestnancov. Koľkými spôsobmi možno vybrať skupinu zamestnancov, ktorá sa zúčastní konferencie.

→ **Úloha 17.** Na ihrisku sa stretlo 6 kamarátov. Koľkými spôsobmi sa môžu rozdeliť na dva tímy veľkostí

a) 2 a 4,

b) 3 a 3?

Pod rozdelením na dva tímy myslíme rozklad množiny kamarátov na dve triedy.

V nasledujúcich úlohách rozumieme pod *kartou* usporiadanú dvojicu $(c, n) \in F \times H$, kde

$$F = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \quad \text{a} \quad H = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}.$$

Prvky množiny F nazývame *farby* a prvky množiny H *hodnoty*. Množina hodnôt je lineárne usporiadaná: $2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < J < Q < K < A$. Pod *pokrovou kombináciou* rozumieme ľubovoľnú množinu piatich (rôznych) kariet. Pre stručnosť môžeme miesto (c, n) zapisovať ako cn , napr. $\heartsuit 7$.

→ **Úloha 18.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií?

V nasledujúcich úlohách sa pýtame na počet pokrových kombinácií s istými vlastnosťami. Okrem určenia ich počtu vypočítajte aj pravdepodobnosť, že pri náhodnom výbere piatich kariet dostaneme danú pokrovú kombináciu.

→ **Úloha 19.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich postupku piatich kariet rovnakej farby (*straight flush*)?

Úloha 20. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich štyri karty s rovnakým číslom?

→ **Úloha 21.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$ (*full house*)?

→ **Úloha 22.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií iných ako *full house*?

Úloha 23. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, v ktorých majú všetky karty rovnakú farbu (*flush*)?

Úloha 24. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet ľubovoľnej farby, ktoré nie sú *straight flush* (*straight*)?

→ **Úloha 25.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú trojicu kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve inej hodnoty, navzájom rôznej (*trojica*);

- **Úloha 26.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x , dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z , pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (dva páry)?
- **Úloha 27.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú aspoň jedno eso?
- **Úloha 28.** Na večierku je n mužov a n žien. Koľkými spôsobmi sa vedia postaviť do kruhu, ak
- nie sú žiadne obmedzenia,
 - dve ženy nesmú stáť vedľa seba.

Úloha 29. Za okrúhly stôl s $2n$ stoličkami chceme usadiť n manželských párov. Manželia musia sedieť vedľa seba, ale je jedno, či muž bude napravo od manželky alebo opačne. Koľkými spôsobmi ich môžeme usadiť, ak

- rozlišujeme stoličky?
- nerozlišujeme stoličky?

Na čo si dať pozor pri riešení takýchto úloh

Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x , dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z , pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (dva páry)?

Veľmi častý problém pri riešení takýchto zložitejších úloh si ilustrujeme na úlohe 26, ktorú väčšina študentov na prvý pokus vyrieši nesprávne. Jedno z takýchto typických riešení je nasledovné. Pre lepšiu názornosť ho zapíšeme viac formálne.

Nesprávne riešenie

- Vyberieme hodnotu $a \in H$ pre prvý pár – 13 možností.
- Vyberieme farby $\{f, g\} \in \binom{F}{2}$ pre prvý pár – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme hodnotu $b \in H$ pre druhý pár – 12 možností.
- Vyberieme farby $\{h, i\} \in \binom{F}{2}$ pre druhý pár – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme hodnotu poslednej karty $c \in (H - \{a, b\})$ – 11 možností.
- Vyberieme farbu poslednej karty $j \in F$ – 4 možnosti.

Tatko vyberieme pokrovú kombináciu $\{fa, ga, hb, ib, jc\}$ a máme na to

$$13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4 \quad \text{možností.}$$

Toto riešenie vlastne priamočiaro zodpovedá nasledovnému programu, ktorým vypíšeme všetky možnosti

Problémom tohto riešenia je, že započítava niektoré riešenie viackrát. Napr. ku kombinácii

$$\{\heartsuit 7, \spadesuit 7, \heartsuit J, \diamondsuit J, \clubsuit 3\}$$

sa vieme dostať voľbami:

$$1. a = 7, f = \heartsuit, g = \spadesuit, b = J, h = \heartsuit, i = \diamondsuit, c = 3, j = \clubsuit,$$

$$2. a = J, f = \heartsuit, g = \diamondsuit, b = 7, h = \heartsuit, i = \spadesuit, c = 3, j = \clubsuit.$$

V druhom prípade dostaneme kombináciu $\{\heartsuit J, \diamondsuit J, \heartsuit 7, \spadesuit 7, \clubsuit 3\}$, čo je rovnaká množina ako v prvom prípade. Na poradí kariet totiž nezáleží.

Problémom je, že my nemáme *prvý pár* a *druhý pár*, ako píšeme v riešení. Takto sme tie páry rozlíšili, no v skutočnosti v skúmanej množine rozlíšiteľné nie sú. Dve dvojice sú rovnocenné.

Na formálnej úrovni je problém v tom, že zovšeobecnené pravidlo súčinu, ktoré využívame, počíta usporiadané 6-tice. My však chceme počítať niečo iné – 5-prvkové množiny kariet. Na to potrebujeme nájsť bijekciu, ktorá nám z týchto usporiadaných 6-tíc, ktoré obsahujú 6 čiastkových informácií o našej pokrovej kombinácii, zobrazí na samotnú pokrovú kombináciu.

No a práve na toto si treba dávať pozor. Pri násobení možností nám vždy záleží na poradí čiastkových volieb. Preto musíme starostlivo kontrolovať, či sme každú možnosť započítali práve raz.

Ukážeme si dva spôsoby ako riešenie opraviť. Prvým je len spočítať koľkokrát sme každú možnosť započítali a využiť pravidlo delenia. Druhým je počítať už priamo možnosti tak, nech každú započítame práve raz.

Riešenie cez pravidlo delenia

- Vyberieme hodnotu $a \in H$ pre prvý pár – 13 možností.
- Vyberieme farby $\{f, g\} \in \binom{F}{2}$ pre prvý pár – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme hodnotu $b \in H$ pre druhý pár – 12 možností.
- Vyberieme farby $\{h, i\} \in \binom{F}{2}$ pre druhý pár – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme poslednú kartu $(j, c) \in F \times (H - \{a, b\})$ – $11 \cdot 4$ možností.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu má množina A takýchto usporiadaných päťíc $(a, \{f, g\}, b, \{h, i\}, (c, j))$ veľkosť $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4$. Majme zobrazenie $f: A \rightarrow B$, kde B je množina možností zo zadania, s predpisom

$$f(a, \{f, g\}, b, \{h, i\}, (c, j)) = \{fa, ga, hb, ib, jc\}.$$

Ktoré 5-tice sa zobrazia na pokrovú kombináciu $\{fa, ga, hb, ib, jc\}$? Na prvom mieste musí byť hodnota z nejakého páru – to môže byť a alebo b . Na druhom mieste sme museli vybrať dvojicu farieb $\{f, g\}$, ak sme vybrali a , alebo dvojicu $\{h, i\}$, ak sme vybrali b . Na tretie miesto sme museli vybrať druhú z hodnôt a, b , ktoré máme dvakrát. Na štvrté zvyšnú dvojicu farieb a na piate miesto (j, c) . Dostávame tak dve 5-tice $(a, \{f, g\}, b, \{h, i\}, (j, c))$ a $(b, \{h, i\}, a, \{f, g\})$. Podľa pravidla delenia tak máme

$$|B| = \frac{|A|}{2} = \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4}{2} = 123\,552.$$

Riešenie bez pravidla delenia

- Vyberieme hodnoty $\{a, b\} \in \binom{H}{2}$, ktoré sa vyskytnú dvakrát – $\binom{13}{2}$ možností. Hodnoty v množine $\{a, b\}$ si označíme tak, aby platilo $a < b$.
- Vyberieme farby $\{f, g\} \in \binom{F}{2}$ pre pár s hodnotou a – $\binom{4}{2}$ možností.

- Vyberieme farby $\{h, i\} \in \binom{F}{2}$ pre pár s hodnotou $b - \binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme poslednú kartu $(j, c) \in F \times (H - \{a, b\}) - 11 \cdot 4$ možností.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu máme $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4$ možností, ako vybrať usporiadanú štvoricu $(\{a, b\}, \{f, g\}, \{h, i\}, (c, j))$, ktorej priradíme pokrovú kombináciu $\{fa, ga, hb, ib, jc\}$.

Takéto zobrazenie je bijekcia. To môžeme ukázať tak, že opäť zistíme, ktoré 4-ice sa zorbia na pokrovú kombináciu $\{fa, ga, hb, ib, jc\}$. Na prvom mieste musia mať množinu dvoch hodnôt vyskytujúcich sa dvakrát – to musí byť $\{a, b\}$. Na druhom mieste musí byť dvojica farieb menšej hodnoty, na treťom dvojica farieb väčšej hodnoty a na štvrtom ostáva dvojica (i, c) pre kartu mimo párov. Vzor každej pokrovej kombinácie je teda určený jednoznačne, teda ide o bijekciu. Preto je počet dvoch párov

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4 = 123\,552.$$

K týmto dvom riešeniam uvedieme programy, pre zmenu v C++, ktoré vypíšu všetky možnosti podľa predošlých použití zovšeobecneného pravidla súčinu. Viete si skontrolovať, že funkcia `dva_pary_1` vypíše každú možnosť práve dvakrát a funkcia `dva_pary_2` každú práve raz.

```
#include <bits/stdc++.h>
#include "Combinatorics.h"

using namespace std;

set<int> difference(const set<int> &A, const set<int> &B) {
    set<int> C;
    for (int a : A) {
        if (B.count(a) == 0) {
            C.insert(a);
        }
    }
    return C;
}

// Mnozina hodnot, pre jednoduchost mame 11 = J, 12 = Q, 13 = K, 14 = A
set<int> H = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14};
// Mnozina farieb: S = srdcia, K = kary, T = trefy, P = piky
set<char> F = {'S', 'K', 'T', 'P'};

void dva_pary_1() {
    ofstream outf("dva_pary_1.txt");
    int pocet = 0;

    for (int a : H) {
        for (auto s : combinations_without_repetitions(F, 2)) {
            char f = *(s.begin());
            s.erase(s.begin());
            char g = *(s.begin());
            for (int b : difference(H, {a})) {
                for (auto t : combinations_without_repetitions(F, 2)) {
                    char h = *(t.begin());
                    t.erase(t.begin());
                    char i = *(t.begin());
                    for (char j : F) {
                        for (int c : difference(H, {a, b})) {
                            outf << f << a << " "
```

```

        << g << a << " "
        << h << b << " "
        << i << b << " "
        << j << c << endl;
        pocet++;
    }
}
}
}
}
}
cout << pocet / 2 << " moznosti\n";
}

void dva_pary_2() {
    ofstream outf("dva_pary_2.txt");
    int pocet = 0;

    for (auto r : combinations_without_repetitions(H, 2)) {
        int a = *(r.begin());
        r.erase(r.begin());
        int b = *(r.begin());
        for (auto s : combinations_without_repetitions(F, 2)) {
            char f = *(s.begin());
            s.erase(s.begin());
            char g = *(s.begin());
            for (auto t : combinations_without_repetitions(F, 2)) {
                char h = *(t.begin());
                t.erase(t.begin());
                char i = *(t.begin());
                for (char j : F) {
                    for (int c : difference(H, {a, b})) {
                        outf << f << a << " "
                            << g << a << " "
                            << h << b << " "
                            << i << b << " "
                            << j << c << endl;
                        pocet++;
                    }
                }
            }
        }
    }
    cout << pocet << " moznosti\n";
}

int main() {
    dva_pary_1();
    dva_pary_2();
}

```

Program využíva knižnicu Combinatorics.h, na ktorej pracovala študentka Nadiya Balanchuk v rámci ročníkového projektu. Môžete si ju stiahnuť zo stránky: <http://davinci.fmph.uniba.sk/~balanchuk2/rp.html>. Hore uvedený program si môžete stiahnuť na: <http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/uktg/cvika/poker.cpp>.

Funkcia dva_pary_1 vypisuje každé riešenie dvakrát (môžete si overiť vo výstupnom súbore, nájdete tam napr. K2 P2 K3 P3 K4 aj K3 P3 K2 P2 K4, čo zodpovedá tej istej pokrovej kombinácii). Preto výsledný počet delíme dvomi. Za to funkcia dva_pary_2 zapisuje do súboru každú možnosť práve raz.

Tiež si môžete na týchto programoch všimnúť princíp bijekcie (príp. iných zobrazení k -na-1)

Výsledky úloh

1. $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 = 49^7$
2. a) $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.
3. n^7
4. 16
5. 8
6. $n!$
7. $\binom{35}{5}$
8. $\binom{49}{7} \cdot 7$
9. $\binom{20}{10}$
10. $\binom{20}{7}$
11. $\binom{20}{7} \cdot 2^{13}$
12. $\binom{20}{6} \cdot 2^{14} + \binom{20}{7} \cdot 2^{13}$
13. $2^{n(n-1)}$
14. $\binom{2n}{n}^{2n}$
15. $2^{(n-1)^2}$
16. 2^8
17. a) $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$, b) $\frac{1}{2} \binom{6}{3} = 10$
18. $\binom{52}{5}$
19. Počet straight flush pokrových kombinácií je $9 \cdot 4 = 36$, teda pravdepodobnosť je $36 / \binom{52}{5} \approx 0,0000139$.
20. $13 \cdot 48 = 624$
21. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744$
22. $\binom{52}{5} - 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 2595216$
23. $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$
24. $9 \cdot 4^5 - 40 = 9176$
25. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 48 \cdot 44 / 2 = 54\,912$
26. $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 123552$
27. $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.

28. a) $(2n-1)!$, b) $\frac{(n!)^2}{n} = n! \cdot (n-1)!$

29. a) $2 \cdot n! \cdot 2^n$, b) $\frac{2 \cdot n! \cdot 2^n}{2^n} = (n-1)! \cdot 2^n$