

Cvičenie 5: Kombinatorické identity a sumy

Nasledujúce identity je zväčša možné dokázať dvoma principiálne odlišnými spôsobmi: algebraickou manipuláciou alebo kombinatorickou interpretáciou. Hoci nemusí byť na škodu vyriešiť niekoľko úloh aj algebraicky, cieľom je predovšetkým precvičenie *kombinatorických dôkazov*. Takýto kombinatorický dôkaz spočíva v identifikácii vhodných tried kombinatorických konfigurácií, ktorých počet je daný ľavou a pravou stranou identity a v následnom pozorovaní, že medzi týmito triedami existuje bijekcia. Preto sa často hovorí aj o *bijektívnych dôkazoch*.

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Úloha 2. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ platí

$$2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}.$$

Úloha 3. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 4.** Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}.$$

→ **Úloha 5.** Dokážte, že pre všetky $n, m, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m}.$$

→ **Úloha 6.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3 = \binom{3n}{3}.$$

Úloha 7. Dokážte, že pre všetky $n, r, s, t \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{s-t} = \binom{n}{s}\binom{s}{t}\binom{n-s}{r-t}.$$

Úloha 8. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ platí

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Úloha 9. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Úloha 10. Dokážte *Vandermondovu identitu*: pre všetky $n, m, r \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

→ **Úloha 11.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

Predošlú úlohu by sme mohli mať zadanú bez pravej strany – vtedy by našou úlohou bolo nájsť jednoduchý výraz s rovnakou hodnotou, akú má počítaná suma. Výsledný výraz má byť v tzv. uzavretom tvare, teda nesmie obsahovať žiadnu sumu, súčin s premenným počtom členov či proste tri body. Aké metódy môžeme použiť na dokazovanie súm? Jednou z nich je počítanie dvomi spôsobmi. Zhrnieme teraz aj prehľad ostatných metód.

1. Vypočítať si niekoľko prvých členov, na základe nich si tipnúť výsledok a následne dokázať jeho správnosť (napr. matematickou indukciou). Veľa výsledkov je však takých, že nevidno dobre z nich, čo sú zač.
2. Použiť pri výpočte inú, už známu sumu. Často si to vyžaduje upraviť sumu do tvaru vhodného pre aplikáciu známej sumy. To často obnáša
 - použiť kombinatorické identity;
 - rozpísať si kombinačné čísla cez faktoriály a upraviť ich tak, aby sme dostali kombinačné číslo (čísla) vhodné pre sumáciu;
 - vyňatie konštanty pred sumu ($\sum c \cdot a_k = c \sum a_k$);
 - rozdelenie sumy na viac súm ($\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$);
 - substituovať premenné, upraviť tým sumačný rozsah.
3. Upraviť známu sumu obsahujúcu reálnu premennú x (napr. Binomickú vetu) do vhodného tvaru aplikovaním operácie ako sú derivácia alebo integrácia.
4. Nájsť kombinatorickú interpretáciu sumy (teda nejakú úlohu kde počet možností možno počítat riešenou sumou) a prísť k počtu možností iným, jednoduchším spôsobom. Teda ide o to, čo sme trénovali na cvičení 5, len s tým, že máme len jednu stranu rovnosti.

Pri používaní známych súm príde najviac vhod binomická veta.

Veta 1 (Binomická veta). Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Môžete však používať aj iné známe sumy, napr. tie, čo sa uvádzajú v skriptách alebo v cvičení 5. Ak však používate sumu z cvičenia, ktorá nemá názov, tak súčasťou úplného riešenia by mal byť aj jej dôkaz. Keď používate sumu, ktorá je pomenovaná (napr. Cauchyho sčítací vzorec), uveďte jej názov – vtedy je vidno, že sa odvolávate na niečo známe a taktiež na aké presne tvrdenie sa odvolávate, teda nemusíte písať do riešenia aj dôkaz.

Úloha 12. Kombinatoricky interpretujte binomickú vetu pre $x \in \mathbb{N}$.

Úloha 13. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{k}.$$

Úloha 14. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 15.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} 3^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 16.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 17.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (3k + 1) \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 18.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k 2^k \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 19.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k(k-1) \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 20.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 21.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 22.** Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Úloha 23. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k}.$$

Úloha 24. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{4k}.$$

Úloha 25. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{5k}.$$

Úloha 26. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{4k}.$$

Úloha 27. (*) Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{4k}.$$

Úloha 28. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{n}{m-k}.$$

Úloha 29. Vypočítajte pre $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$:

$$\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{k}{2} (n-k)$$

Úloha 30. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k} = 2^{n-k} \binom{n}{k}.$$

→ **Úloha 31.** Vypočítajte sumu

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k}.$$

Úloha 32. Vypočítajte sumu

$$\sum_{k=1}^m k \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}.$$

Úloha 33. V závislosti od prirodzeného čísla n vypočítajte sumu

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{2n}{k} \binom{3n}{n-k}.$$

Úloha 34. Vypočítajte sumu v závislosti od nezáporných celých čísel n, k :

$$\sum_{i=k}^n i \binom{i}{k}.$$

Úloha 35 (*). Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n-k}{k} = F_{n+1},$$

kde F_{n+1} je $(n+1)$ -vé Fibonacciho číslo.

Úloha 36 (*). Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

Viaceré kombinatorické identity možno dokázať ich transformáciou na ľahšie dokázateľné identity medzi polynómami. To znamená nájsť k danej identite $L(s) = R(s)$ polynómy $p_L(x)$ a $p_R(x)$ také, že koeficient pri x^s je v $p_L(x)$ rovný $L(s)$ a v $p_R(x)$ je rovný $R(s)$. Následne stačí dokázať, že pre všetky x platí $p_L(x) = p_R(x)$ – rovnosť koeficientov je priamym dôsledkom. Pri hľadaní vhodných polynómov $p_L(x)$ a $p_R(x)$ je užitočným nástrojom práve binomická veta. Viď tiež poznámku pod vetou 2.15 zo skrípt.

Aj keď sa použitie tejto metódy obmedzuje iba na relatívne nevelkú triedu identít, ide o základ oveľa všeobecnejšej metódy tzv. *generujúcich funkcií* (niekde tiež *vytvárajúcich funkcií*), v ktorej sa namiesto polynómov používajú „nekonečné polynómy“, čiže *formálne mocninové rady*. To už však presahuje rámec tohto predmetu. Viac sa môžete dozvedieť na predmete Kombinatorická analýza (1).

Úloha 37 (*). Pomocou binomickej vety dokážte pre všetky $n, s \in \mathbb{N}$ identitu

$$\binom{n+1}{s+1} = \binom{n}{s} + \binom{n}{s+1}.$$

Úloha 38 (*). Pomocou binomickej vety dokážte pre všetky $n, s \in \mathbb{N}$ identitu

$$\binom{3n}{s} = \sum_{\substack{i,j,k \in \mathbb{N} \\ i+j+k=s}} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \binom{n}{k}.$$

Nápovedy k riešeniam

- Počet spôsobov, ako vybrať k -prvkovú podmnožinu n -prvkovej množiny pričom jeden prvok je špeciálny.
- Z $n+1$ čísel losujeme k nerozlíšiteľných a jedno dodatkové.
- Z n čísel losujeme k nerozlíšiteľných a jedno dodatkové.
- Počet n -písmenových slov z písmen $\{a, b, c\}$ obsahujúcich práva m písmen a a práve k písmen b .
- Máme po n prvkov na 3 kôpkach, chceme vyberať z nich n . Rozdelíme na prípady podľa toho, po koľko prvkov vyberáme z troch kôpok: $3+0+0$, $2+1+0$, $1+1+1$.
- Počet slov dĺžky n z písmen $\{a, b, c, d\}$ takých, že počet a a b je s , počet b a c je r , počet b je t .
- Počet podmnožín (ne)párnej veľkosti. Každá taká podmnožina je jednoznačne určená $n-1$ miestami charakteristického vektora.
- Z $2n$ prvkov vyberáme podmnožinu n prvkov: vyberieme k z prvých n a z druhých n prvkov vyberieme k , čo tam nie sú.
- Z $n+m$ prvkov vyberáme r prvkov. Rozdelíme na prípady, kedy vyberáme k z m a zvyšných $r-k$ z n prvkov.
- Počet n -písmenových slov z písmen $\{a, b, c\}$.
- 2^n
- 0
- 4^n
- $n \cdot 2^{n-1}$
- $3n \cdot 2^{n-1} + 2^n$

18. $2n \cdot 3^{n-1}$
19. $n(n-1) \cdot 2^{n-2}$
20. $n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2}$
21. $\frac{2^{n+1} - 1}{n + 1}$
22. $\frac{1}{n + 1}$
23. 2^{n-1}
- 24.
- 25.
- 26.
- 27.
28. $\binom{2n}{m}$
29. $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2^{n-3}$ Zdroj: <http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~kompisova/uktg1819/du/du02-ries>
30. Počet n -písmenových slov z $\{a, b, c\}$ obsahujúcich presne k písmen a .
31. $\binom{n+1}{k+1}$. Počet $(k+1)$ -prvkových podmnožín $(n+1)$ -prvkovej množiny. Rozdelíme na prípady podľa najväčšieho prvku.
35. Počet postupností zložených z čísel $\{1, 2\}$, ktorých súčet je n .
37. Roznásobte zátvorky v rovnosti $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n + x(1+x)^n$.

Riešenia vybraných úloh

Riešenie úlohy 32

Zo sumy môžeme vidieť, že si z n vyberáme k prvkov, označme si ich A . Z týchto k A -čkových prvkov si vyberieme ešte jeden špeciálny. Povedzme, že jedno A si podčiarkneme. Zo zvyšných $n-k$ prvkov si ešte vyberieme $m-k$ prvkov, ktoré si označíme B . Zvyšné nevybrané prvky si označíme C . Číslo k môže nadobúdať hocikaké hodnoty od 1 po m , ale stále nám platí, že počet A -čok a B -čok je rovnaký – je to m . Poďme to teda dať dohromady.

Budeme počítať počet n -prvkových postupností zložených z písmen A, B, C , ktoré obsahujú v súčte presne m písmen A a B a navyše obsahujú jedno A , ktoré je podčiarknuté. Rozložíme si všetky postupnosti na diskjunktné množiny podľa počtu písmen A . Počet postupností, ktoré obsahujú presne k znakov A (vrátane podčiarknutého) je

$$k \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}.$$

Totíž, máme $\binom{n}{k}$ spôsobov, ako vybrať pozície, na ktorých bude znak A , pre každý výber môžeme k spôsobmi vybrať podčiarknuté A a potom vždy môžeme vybrať $\binom{n-k}{m-k}$ miesta, na ktorých budú

znaky B . Počet všetkých takýchto postupností vypočítame teda podľa pravidla súčtu presne našou sumou.

Iný spôsob, ako vieme dostať počet týchto postupností, je že si najprv vyberieme pozície, na ktorých budú znaky A alebo B , na nevybrané pozície umiestnime rovno C . To vieme spraviť $\binom{n}{m}$ spôsobmi. Spomedzi týchto m pozícií si vyberieme jednu, na ktorej bude podčiarknuté A , na čo máme zakaždým m možností. Na zvyšných $m - 1$ pozíciách môžu byť úplne ľubovoľne znaky A a B , pre každú z nich máme 2 možnosti, teda spolu 2^{m-1} možností. Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu tak je všetkých postupností

$$\binom{n}{m} m \cdot 2^{m-1},$$

čo je teda aj výsledok našej sumy.

Riešenie úlohy 33

Uvažujme úlohu: Máme $5n$ detí, z toho $2n$ chlapcov a $3n$ dievčat. Koľkými spôsobmi možno z nich vytvoriť tím pozostávajúci z n detí a v rámci tímu určiť dvoch kapitánov: jedného chlapca a jedno dievča. Formálne možno túto úlohu vyjadriť napríklad takto. Máme množiny C a D také, že $|C| = 2n$, $|D| = 3n$ a $D \cap C = \emptyset$. Chceme určiť počet prvkov množiny

$$M = \left\{ (T, c, d); T \in \binom{C \cup D}{n} \wedge c \in C \cap T \wedge d \in D \cap T \right\}.$$

1. riešenie Všetky výbery rozdelíme na množiny $M_0, M_1, \dots, M_n$, kde pre každé $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ množina M_k obsahuje výbery obsahujúce práve k chlapcov. Tieto množiny sú po dvoch disjunktné, nakoľko obsahujú možnosti s rôznym počtom chlapcov. Každý tím z množiny M_k je jednoznačne určený nasledovnými výbermi:

1. Vyberieme množinu k chlapcov T_c , na čo máme $\binom{2n}{k}$ možností.
2. Vyberieme množinu $n - k$ dievčat T_d , na čo máme $\binom{3n}{n-k}$ možností.
3. Z k vybraných chlapcov vyberieme chlapca kapitána, teda vyberieme $c \in T_c$, na čo máme k možností (pre každý výber T_c).
4. Podobne máme $n - k$ možností pre výber dievčaťa kapitána $d \in T_d$.

Takto sme dostali tím $T_c \cup T_d$ s kapitánmi c, d . Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu máme celkom

$$|M_k| = \binom{2n}{k} \binom{3n}{n-k} k(n-k) \quad \text{možností.}$$

Podľa pravidla súčtu je všetkých možností

$$\sum_{k=0}^n |M_k| = \sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{2n}{k} \binom{3n}{n-k},$$

čo sa rovná našej sume.

2. riešenie Tím vieme vybrať aj nasledovne:

1. Vyberieme kapitána chlapcov $c \in C$, na čo máme $2n$ možností.
2. Vyberieme kapitánku dievčat $d \in D$, na čo máme $3n$ možností.
3. Zo zvyšných $5n - 2$ detí vyberieme zvyšných $n - 2$ detí do tímu, teda $T' \in \binom{C \cup D - \{c, d\}}{n-2}$, na čo máme vždy $\binom{5n-2}{n-2}$ možností.

Týmto je jednoznačne určený tím $\{c, d\} \cup T'$ s kapitánmi c, d . Podľa zovšeobecneného pravidla súčtu je takýchto tímov

$$2n \cdot 3n \cdot \binom{5n-2}{n-2} = 6n^2 \binom{5n-2}{n-2}.$$

Keďže ide o riešenie rovnakej úlohy (resp. formálne o mohutnosť množiny M), tak táto hodnota je rovná sume zo zadania.

Riešenie úlohy 34

Zadanie úlohy Uvažujme nasledovnú kombinatorickú úlohu: Máme športový klub, ktorého hráči sú očíslovaní číslami $1, 2, \dots, n+1$ od najmladšieho po najstaršieho. Z hráčov treba vybrať $(k+1)$ -členný tím (podmnožinu) spolu s kapitánom. Kapitán môže, ale nemusí byť súčasťou tímu, no v tíme musí existovať niekto starší ako on.

1. riešenie Možné výbery tímov rozdelíme na po dvoch disjunktné množiny. Pre $i \in \{k, k+1, \dots, n\}$ uvažujme množinu M_i , ktorá obsahuje výbery tímov, kde je hráč $i+1$ najstarší. Každý takýto tím potrebuje ešte vybrať k hráčov, ktorí musia byť vybraní spomedzi hráčov $\{1, 2, \dots, i\}$, na čo máme $\binom{i}{k}$ možností. Potom ešte musíme určiť kapitána – ním môže byť ktokoľvek s menším číslom ako $i+1$, na čo máme i možností. Spolu teda máme

$$\sum_{i=k}^n i \binom{i}{k} \quad \text{možností.}$$

2. riešenie Najprv vyčíslime možnosti, kedy je kapitán súčasťou tímu. Vtedy máme $\binom{n+1}{k+1}$ možností na výber ľudí v tíme. Pre kapitána máme len k možností, keďže ním nemôže byť najstarší hráč. Spolu tu teda máme $k \binom{n+1}{k+1}$ možností.

Ak kapitán nie je súčasťou tímu, tak máme $\binom{n+1}{k+2}$ možností ako vybrať hráčov, čo budú tvoriť tím a kapitána. Potom máme $k+1$ spôsobov ako určiť hráča, ktorý nepôjde do tímu a bude kapitánom – opäť nemôžeme zvoliť najstaršieho. V tomto prípade máme $(k+1) \binom{n+1}{k+1}$.

Výsledný počet možností, a teda aj výsledok našej sumy, teda je

$$\binom{n+1}{k+2} + (k+1) \binom{n+1}{k+1}.$$