

Cvičenie 6: Základné kombinatorické konfigurácie II

Definícia 1 (Kombinácie s opakovaním). Kombináciou s opakovaním k -tej triedy z n prvkov množiny B nazveme ľubovoľnú k -prvkovú multimnožinu obsahujúcu prvky množiny B . Ich počet označujeme $C'_k(n)$.

Veta 1. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Pre počet kombinácií s opakovaním k -tej triedy z n prvkov množiny B platí*

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Neodporúčame pamätať si tento vzorec, nakoľko sa ľahko dá pomýliť v -1 alebo v zámene n a k . Radšej si pamätajte jeho dôkaz. S využitím myšlienok dôkazu dokonca ani nemusíte túto vetu dokazovať. Stačí pri dôkazoch využiť, že každú kombináciu s opakovaním k -tej triedy z n prvkov možno bijektívne zobraziť na postupnosť k guľôčok a $n-1$ paličiek tak, že počet guľôčok v i -tom úseku udáva, koľkokrát sme do našej kombinácie s opakovaním vybrali i -ty prvok množiny M .

Upozornenie

Pokiaľ sa predsa len rozhodnete v riešení úloh odvolávať na vetu 1, tak dbajte na nasledovnú zásadu):

- Musí byť jasné, ako túto vetu používate, teda že čo je množina M , z ktorej vyberáte prvky a čo je k , teda koľko prvkov z nej vyberáte.
- Musíte použiť naozaj túto vetu s prednášky. Je možné, že ste sa stretli (napr. na strednej škole) s inou definíciou kombinácií s opakovaním alebo aj iným vzorcom, napr. $\binom{n+k}{k}$.

Nestačí len napísať vzorec alebo poznámku „kombinácie s opakovaním“. Riešenia cez vzorec, ktoré nerešpektujú tieto zásady, môžu byť pokladané za neúplné, nakoľko pôsobia, že látke nerozumiете.

Úloha 1. Kombinatoricky interpretujte vetu 1.

→ **Úloha 2.** Na salaši chovajú ovce z deviatich plemien (nekonečne veľa ovcí z každého plemena). Ovce rovnakého plemena sú navzájom neodlíšiteľné. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď, ktorý chce zjesť presne päť ovcí?

Uvedieme príklad neúplných riešení tejto úlohy, hoci so správnym výsledkom.

Neúplné riešenie 1

Kombinácie s opakovaním $n = 9$, $k = 5 \rightarrow \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ možností.

V tomto riešení nie je jasné, ako bola použitá veta 1. Môže ísť o riešenie študenta, ktorý len náhodou správne tipol, že n má byť 9 a k má byť 5. Od úplného riešenia ho nedelí veľa – stačí len podrobnejšie napísať, prečo sme zvolili $n = 9$ a $k = 5$.

Neúplné riešenie 2

Kombinácie s opakovaním $n = 5$, $k = 9 \rightarrow \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ možností.

Toto riešenie má správny výsledok, ale obsahuje dve chyby:

1. Nejde o kombinácie s opakovaním 9-tej triedy z 5 prvkov, ako naznačuje voľba $n = 5$, $k = 9$.
2. Používa nesprávny vzorec pre výpočet počtu kombinácií s opakovaním (v zmysle našej definície)

Správne riešenie

Z (množiny) $n = 9$ plemien vyberáme multimnožinu $k = 5$ plemien, ktorú medveď zje. Kombinácie s opakovaním $\rightarrow \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ možností.

Uvedieme ešte jedno riešenie, v ktorom poukážeme na formálnu nezrovnalosť.

Riešenie s formálnou chybou

Situáciu si predstavíme ako postupnosť 5 guľôčok a 8 paličiek. Paličky nám rozdelia guľôčky na 9 súvislý úsek, pričom počet guľôčok v i -tom úseku reprezentuje počet zjedených oviec z i -teho druhu. Na základe kombinácií s opakovaním takýchto možností je $\binom{5+8}{5} = \binom{13}{5}$.

Tu je chyba len v odvolaní sa na kombinácie s opakovaním. Totižto, keď si úlohu prevedieme na guľôčky a paličky, tak sa tým zbavíme kombinácií s opakovaním. Na určenie počtu rozmiestnení 5 guľôčok a 8 paličiek používame kombinácie *bez opakovania* – z $5 + 8 = 13$ miest vyberieme 5 miest pre guľôčky, čo nám určí celú postupnosť.

→ **Úloha 3.** Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď z predchádzajúcej úlohy v prípade, že sa rozhodol držať diétu a zjesť *najviac* štyri ovce?

→ **Úloha 4.** Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = s,$$

kde $p, s \in \mathbb{N}$. Nájdite počet riešení tejto rovnice v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

→ **Úloha 5.** Uvažujme nerovnosť

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p \leq s,$$

kde $p, s \in \mathbb{N}$. Nájdite počet riešení tejto nerovnosti v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

Definícia 2 (Permutácie s opakovaním). Nech $A = \{1, \dots, n\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ a $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ je rozklad množiny B na k disjunktných podmnožín, pričom $|B_1| = n_1, |B_2| = n_2, \dots, |B_k| = n_k$. Definujme na množine všetkých bijekcií z A do B reláciu ekvivalencie R takú, že pre dvojicu bijekcií $f, g: A \rightarrow B$ platí fRg práve vtedy, keď pre všetky $i \in A$ existuje index $j \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $f(i)$ aj $g(i)$ patria do B_j – teda ak sa všetky prvky A zobrazia pri oboch zobrazeniach na prvok rovnakej triedy rozkladu množiny B . *Permutáciou s opakovaním* z n_1 prvkov prvého druhu, n_2 prvkov druhého druhu, $\dots$, n_k prvkov k -teho druhu nazveme ľubovoľnú triedu ekvivalencie relácie R .

Veta 2. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ sú ľubovoľné a nech $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ sú také, že $n_1 + \dots + n_k = n$. Počet permutácií s opakovaním z n_1 prvkov prvého druhu, n_2 prvkov druhého druhu, $\dots$, n_k prvkov k -teho druhu je

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} := \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

→ **Úloha 6.** Koľko prešmyčiek je možné vytvoriť zo slova ANTANANARIVO?

Úloha 7. Na šachovnici stojí všetkých 32 štandardných figúrok. Koľko možných rozostavení možno získať po výmene pozícií nejakého počtu figúrok? (Vo výsledom rozostavení je teda rovnaká sada figúrok a obsadených je rovnakých 32 políčok.)

■ Nasledujúce úlohy sú zamerané na konfigurácie rôznych typov.

→ **Úloha 8.** Na šachovnici stojí všetkých 32 štandardných figúrok. Koľko možných rozostavení možno získať po prehodení práve jednej dvojice figúrok?

→ **Úloha 9.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok (bez obmedzení daných šachovými pravidlami).

Úloha 10. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby všetky biele figúrky boli v riadkoch 1 až 4 a všetky čierne figúrky boli v riadkoch 5 až 8?

→ **Úloha 11.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby v každom stĺpci bol práve jeden biely pešiak?

→ **Úloha 12.** Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dve čierne veže a bieleho kráľa tak, aby žiadna z veží kráľa neohrozovala? (Veža v našej terminológii ohrozuje kráľa aj v prípade, keď ju kráľ môže v ďalšom kroku vyhodiť.)

Úloha 13. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu bieleho a čierneho koňa tak, aby sa navzájom neohrozovali?

Úloha 14. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dvoch nerozlíšiteľných koňov tak, aby sa navzájom neohrozovali?

→ **Úloha 15.** Koľkými spôsobmi možno vytvoriť zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú multimnožinu (ľubovoľnej veľkosti)?

Úloha 16. Koľkými spôsobmi možno vytvoriť zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú multimnožinu tak, aby obsahovala aspoň jedného strelca a najviac troch koňov?

Úloha 17. V obchode majú 13 druhov keksíkov. Chceme si kúpiť 24 keksíkov tak, aby sme z každého druhu kúpili aspoň jeden. Koľkými spôsobmi to vieme spraviť?

Úloha 18. Určte počet 7-ciferných čísel, ktoré majú cifry

- a) v klesajúcom poradí,
- b) v rastúcom poradí,
- c) v nerastúcom poradí,
- d) v neklesajúcom poradí.

Úloha 19. Na policike je za sebou uložených 12 kníh. Koľkými spôsobmi možno vybrať spomedzi nich 5 tak, aby sme nevybrali žiadne dve vedľa seba?

Úloha 20. Katka, Lenka, Norbert, Marek a Oľga nazbierali 47 nerozlíšiteľných jabĺk. Chcú si ich rozdeliť tak, že Katka a Lenka dostanú párny počet jabĺk a Norbert, Marek a Oľga dostanú nepárny počet jabĺk. Koľkými spôsobmi to môžu spraviť?

→ **Úloha 21.** Máme 52 kariet: 26 červených a 26 modrých. Koľkými spôsobmi možno z nich vybrať podmnožinu tak, aby v nej bol rovnaký počet červených a modrých kariet?

Úloha 22. Nech $k, d \in \mathbb{N}^+$ a nech A je množina majúca kd prvkov. Určte počet rozkladov množiny A na d -prvkové podmnožiny.

Riešenia

2. $\binom{13}{5}$

3. $\binom{13}{4}$

4. $\forall \mathbb{N}: \binom{p+s-1}{s}, \forall \mathbb{N}^+: \binom{s-1}{s-p}$

5. $\forall \mathbb{N}: \binom{p+s}{s}, \forall \mathbb{N}^+: \binom{p}{s}$

6. $\frac{12!}{4! \cdot 3!}$

7. $\frac{32!}{8! \cdot 8! \cdot (2!)^6}$

8. $\binom{32}{2} - 2(\binom{8}{2} - 3) + 1$

9. $\frac{64!}{32! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 2^6}$

10. $\left(\frac{32!}{16! \cdot 8! \cdot 2^3}\right)^2$

11. $8^8 \cdot \binom{56}{24} \frac{24!}{8! \cdot 2^6}$

12. $64\binom{49}{2} = 49\,728$

13. $64 \cdot 63 - (4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8) = 3\,696$

14. $3\,696/2 = 1\,848$

15. $(9 \cdot 3^3 \cdot 2^2)^2$

16. $2^{24}(2^4 - 1)(2^4 - 1) = 2^{24} \cdot 15^2 = 3\,774\,873\,600$

17. $\binom{23}{11} = 1\,352\,078$

18. a) $\binom{10}{7}$, b) $\binom{9}{7}$, c) $\binom{9+7}{7} - 1$, d) $\binom{8+7}{7}$

19. $\binom{8}{5} = 56$

20. $\binom{5+22-1}{22} = \binom{26}{22} = 14\,950$, 2. sada D. Ú. 2019/20

21. $\sum_{k=0}^{26} \binom{26}{k} \binom{26}{k} = \binom{52}{26}$

22. $\frac{(kd)!}{k!(d!)^k}$