# Cvičenie 6: základné kombinatorické konfigurácie II

**Definícia 1** (Kombinácie s opakovaním)**.** *Kombináciou s opakovaním $k$-tej triedy z $n$ prvkov množiny $B$* nazveme ľubovoľnú $k$-prvkovú multimnožinu obsahujúcu prvky množiny $B$. Ich počet označujeme $C'_k(n)$.

**Veta 1.** *Nech $B$ je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Pre počet kombinácií s opakovaním $k$-tej triedy z $n$ prvkov množiny $B$ platí*

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

*Neodporúčame pamätať si tento vzorec, nakoľko sa ľahko dá pomýliť v $-1$ alebo v zámene $n$ a $k$. Radšej si pamätajte jeho dôkaz. S využitím myšlienok dôkazu dokonca ani nemusíte túto vetu dokazovať. Stačí pri dôkazoch využiť, že každú kombináciu s opakovaním $k$-tej triedy z $n$ prvkov možno bijektívne zobraziť na postupnosť $k$ guľôčok a $n-1$ paličiek tak, že počet guľôčok v $i$-tom úseku udáva, koľkokrát sme do našej kombinácie s opakovaním vybrali $i$-ty prvok množiny $M$.*

**Upozornenie**

Pokiaľ sa predsa len rozhodnete v riešení úloh odvolávať na vetu 1, tak dbajte na nasledovnú zásadu):

- Musí byť jasné, ako túto vetu používate, teda že čo je množina $M$, z ktorej vyberáte prvky a čo je $k$, teda koľko prvkov z nej vyberáte.
- Musíte použiť naozaj túto vetu s prednášky. Je možné, že ste sa stretli (napr. na strednej škole) s inou definíciou kombinácii s opakovaním alebo aj iným vzorcom, napr. $\binom{n+k}{k}$.

Nestačí len napísať vzorec alebo poznámku „kombinácie s opakovaním“. Riešenia cez vzorec, ktoré nerešpektujú tieto zásady, môžu byť pokladané za neúplné, nakoľko pôsobia, že látke nerozumiete.

**Úloha 1.** Kombinatoricky interpretujte vetu 1.

→ **Úloha 2.** Na salaši chovajú ovce z deviatich plemien (nekonečne veľa oviec z každého plemena). Ovce rovnakého plemena sú navzájom neodlíšiteľné. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď, ktorý chce zjesť presne päť oviec?

Uvedieme príklad neúplných riešení tejto úlohy, hoci so správnym výsledkom.

**Neúplné riešenie 1**

Kombinácie s opakovaním $n = 9$, $k = 5 \to \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ možností.

V tomto riešení nie je jasné, ako bola použitá veta 1. Môže ísť o riešenie študenta, ktorý len náhodou správne tipol, že $n$ má byť 9 a $k$ má byť 5. Od úplného riešenia ho nedelí veľa – stačí len podrobnejšie napísať, prečo sme zvolili $n = 9$ a $k = 5$.

**Neúplné riešenie 2**

Kombinácie s opakovaním $n = 5$, $k = 9 \to \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ možností.

Toto riešenie má správny výsledok, ale obsahuje dve chyby:

1. Nejde o kombinácie s opakovaním 9-tej triedy z 5 prvkov, ako naznačuje voľba $n = 9$, $k = 9$.
2. Používa nesprávny vzorec pre výpočet počtu kombinácií s opakovaním (v zmysle našej definície)

**Správne riešenie**

Z (množiny) $n = 9$ plemien vyberáme multimnožinu $k = 5$ plemien, ktorú medveď zje. Kombinácie s opakovaním $\to \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$ možností.

Uvedieme ešte jedno riešenie, v ktorom poukážeme na formálnu nezrovnalosť.

**Riešenie s formálnou chybou**

Situáciu si predstavíme ako postupnosť 5 guľôčok a 8 paličiek. Paličky nám rozdelia guľôčky na 9 súvislý úsek, pričom počet guľôčok v $i$-tom úseku reprezentuje počet zjedených oviec z $i$-teho druhu. Na základe kombinácií s opakovaní takýchto možností je $\binom{5+8}{5} = \binom{13}{5}$.

Tu je chyba len v odvolaní sa na kombinácie s opakovaním. Totižto, keď si úlohu prevedieme na guľôčky a paličky, tak sa tým zbavíme kombinácií s opakovaním. Na určenie počtu rozmiestnení 5 guľôčok a 8 paličiek používame kombinácie *bez opakovania* – z $5 + 8 = 13$ miest vyberieme 5 miest pre guľôčky, čo nám určí celú postupnosť.

→ **Úloha 3.** Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď z predchádzajúcej úlohy v prípade, že sa rozhodol držať diétu a zjesť *najviac* štyri ovce?

→ **Úloha 4.** Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p = s,$$

kde $p, s \in \mathbb{N}$. Nájdite počet riešení tejto rovnice v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

→ **Úloha 5.** Uvažujme nerovnosť

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p \leq s,$$

kde $p, s \in \mathbb{N}$. Nájdite počet riešení tejto nerovnosti v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

**Definícia 2** (Permutácie s opakovaním)**.** Nech $A = \{1, \ldots, n\}$ a $B$ je konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ a $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ je rozklad množiny $B$ na $k$ disjunktných podmnožín, pričom $|B_1| = n_1, |B_2| = n_2, \ldots, |B_k| = n_k$. Definujme na množine všetkých bijekcií z $A$ do $B$ reláciu ekvivalencie $R$ takú, že pre dvojicu bijekcií $f, g\colon A \to B$ platí $fRg$ práve vtedy, keď pre všetky $i \in A$ existuje index $j \in \{1, \ldots, k\}$ tak, že $f(i)$ aj $g(i)$ patria do $B_j$ – teda ak sa všetky prvky $A$ zobrazia pri oboch zobrazeniach na prvok rovnakej triedy rozkladu množiny $B$. *Permutáciou s opakovaním* z $n_1$ prvkov prvého druhu, $n_2$ prvkov druhého druhu, …, $n_k$ prvkov $k$-teho druhu nazveme ľubovoľnú triedu ekvivalencie relácie $R$.

**Veta 2.** *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ sú ľubovoľné a nech $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ sú také, že $n_1 + \ldots + n_k = n$. Počet permutácií s opakovaním z $n_1$ prvkov prvého druhu, $n_2$ prvkov druhého druhu, …, $n_k$ prvkov $k$-teho druhu je*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} := \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

→ **Úloha 6.** Koľko prešmyčiek je možné vytvoriť zo slova `ANTANANARIVO`?

**Úloha 7.** Na šachovnici stojí všetkých 32 štandardných figúrok. Koľko možných rozostavení možno získať po výmene pozícií nejakého počtu figúrok? (Vo výslednom rozostavení je teda rovnaká sada figúrok a obsadených je rovnakých 32 políčok.)

▌ Nasledujúce úlohy sú zamerané na konfigurácie rôznych typov.

→ **Úloha 8.** Na šachovnici stojí všetkých 32 štandardných figúrok. Koľko možných rozostavení možno získať po prehodení práve jednej dvojice figúrok?

→ **Úloha 9.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok (bez obmedzení daných šachovými pravidlami).

**Úloha 10.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby všetky biele figúrky boli v riadkoch 1 až 4 a všetky čierne figúrky boli v riadkoch 5 až 8?

→ **Úloha 11.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby v každom stĺpci bol práve jeden biely pešiak?

→ **Úloha 12.** Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dve čierne veže a bieleho kráľa tak, aby žiadna z veží kráľa neohrozovala? (Veža v našej terminológii ohrozuje kráľa aj v prípade, keď ju kráľ môže v ďalšom kroku vyhodiť.)

**Úloha 13.** Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu bieleho a čierneho koňa tak, aby sa navzájom neohrozovali?

**Úloha 14.** Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dvoch nerozlíšiteľných koňov tak, aby sa navzájom neohrozovali?

→ **Úloha 15.** Koľkými spôsobmi možno vytvoriť zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú multimnožinu (ľubovoľnej veľkosti)?

**Úloha 16.** Koľkými spôsobmi možno vytvoriť zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú multimnožinu tak, aby obsahovala aspoň jedného strelca a najviac troch koňov?

**Úloha 17.** V obchode majú 13 druhov keksíkov. Chceme si kúpiť 24 keksíkov tak, aby sme z každého druhu kúpili aspoň jeden. Koľkými spôsobmi to vieme spraviť?

**Úloha 18.** Určte počet 7-ciferných čísel, ktoré majú cifry

a) v klesajúcom poradí,

b) v rastúcom poradí,

c) v nerastúcom poradí,

d) v neklesajúcom poradí.

**Úloha 19.** Na poličke je za sebou uložených 12 kníh. Koľkými spôsobmi možno vybrať spomedzi nich 5 tak, aby sme nevybrali žiadne dve vedľa seba?

**Úloha 20.** Katka, Lenka, Norbert, Marek a Oľga nazbierali 47 nerozlíšiteľných jabĺk. Chcú si ich rozdeliť tak, že Katka a Lenka dostanú párny počet jabĺk a Norbert, Marek a Oľga dostanú nepárny počet jabĺk. Koľkými spôsobmi to môžu spraviť?

→ **Úloha 21.** Máme 52 kariet: 26 červených a 26 modrých. Koľkými spôsobmi možno z nich vybrať podmnožinu tak, aby v nej bol rovnaký počet červených a modrých kariet?

**Úloha 22.** Nech $k$, $d \in \mathbb{N}^+$ a nech $A$ je množina majúca $kd$ prvkov. Určte počet rozkladov množiny $A$ na $d$-prvkové podmnožiny.

# Riešenia

**2.** $\binom{13}{5}$

**3.** $\binom{13}{4}$

**4.** v $\mathbb{N}$: $\binom{p+s-1}{s}$, v $\mathbb{N}^+$: $\binom{s-1}{s-p}$

**5.** v $\mathbb{N}$: $\binom{p+s}{s}$, v $\mathbb{N}^+$: $\binom{p}{s}$

**6.** $\dfrac{12!}{4! \cdot 3!}$

**7.** $\dfrac{32!}{8! \cdot 8! \cdot (2!)^6}$

**8.** $\binom{32}{2} - 2(\binom{8}{2} - 3) + 1$

**9.** $\dfrac{64!}{32! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 2^6}$

**10.** $\left(\dfrac{32!}{16! \cdot 8! \cdot 2^3}\right)^2$

**11.** $8^8 \cdot \binom{56}{24} \dfrac{24!}{8! \cdot 2^6}$

**12.** $64\binom{49}{2} = 49\,728$

**13.** $64 \cdot 63 - (4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8) = 3\,696$

**14.** $3\,696/2 = 1\,848$

**15.** $(9 \cdot 3^3 \cdot 2^2)^2$

**16.** $2^{24}(2^4 - 1)(2^4 - 1) = 2^{24} \cdot 15^2 = 3\,774\,873\,600$

**17.** $\binom{23}{11} = 1\,352\,078$

**18.** a) $\binom{10}{7}$, b) $\binom{9}{7}$, c) $\binom{9+7}{7} - 1$, d) $\binom{8+7}{7}$

**19.** $\binom{8}{5} = 56$

**20.** $\binom{5+22-1}{22} = \binom{26}{22} = 14\,950$, 2. sada D. Ú. 2019/20

**21.** $\sum_{k=0}^{26} \binom{26}{k}\binom{26}{k} = \binom{52}{26}$

**22.** $\dfrac{(kd)!}{k!(d!)^k}$