Cvičenie 10: Grafy I – základné pojmy

Definícia 1. *Graf* je dvojica $G = (V, E)$, kde V je neprázdna konečná množina a

$$E \subseteq \binom{V}{2}.$$

Prvky množiny V nazývame *vrcholmi*, prvky množiny E nazývame *hranami*.

Ak v grafe $G = (V, E)$ pre nejaké (nie nutne rôzne) vrcholy $u, v \in V$ a hranu $e \in E$ platí $e = \{u, v\}$, hovoríme, že *hrana e je incidentná s vrcholmi u a v*. Pod *rádom grafu* rozumieme počet prvkov množiny V.
Uvedená terminológia nie je úplne ustálená a môže sa od zdroja k zdroju líšiť. Takto definovaný pojem „graf“ sa napríklad často označuje ako jednoduchý graf; niektoré hrany pripúšťajú násobné / paralelné hrany (multigrafy), slučky vo vrcholoch alebo orientované hrany.

Definícia 2. Nech $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Graf G je *k-regulárny*, ak pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) = k$. Graf G je regulárny, ak je k-regulárny pre nejaké k.

Úloha 1. Rozhodnite, či existuje graf, ktorého vrcholy majú stupne:

→ a) 4, 3, 2, 2, 1, 0;

b) 4, 2, 2, 2, 1, 1;

→ c) 6, 4, 3, 3, 2, 2, 1;

→ d) 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;

e) 6, 6, 5, 4, 2, 2, 1;

→ f) 8, 7, 7, 6, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1.

→ **Úloha 2.** Dokážte, že v každom jednoduchom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú aspoň dva vrcholy s rovnakým stupňom.

→ **Úloha 3.** Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k-regulárny jednoduchý graf rádu n.

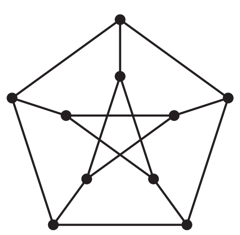
→ **Úloha 4.** Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \dots, n\}$.

Úloha 5. Nech $n, k \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \dots, n\}$, ktoré majú práve k hrán.

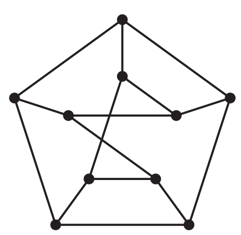
Úloha 6. Nájdite všetky navzájom neizomorfné 3-regulárne grafy rádu 6.

→ **Úloha 7.** Zistite, ktoré z nasledujúcich grafov sú izomorfné.

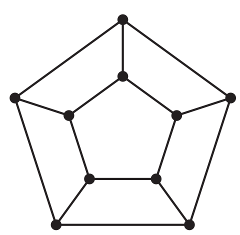
a)

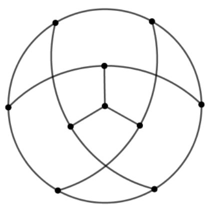
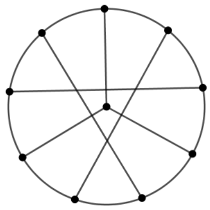
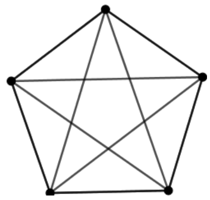


b)



c)



d)  e)  f) 

→ **Úloha 8.** Nech $G = (V, E)$ je graf taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq 2$. Dokážte, že graf G musí nutne obsahovať kružnicu.

Úloha 9. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.

Úloha 10. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.

→ **Úloha 11.** Dokážte, že každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$ a kružnicu dĺžky aspoň $\delta(G) + 1$ (pre $\delta(G) \geq 2$), kde $\delta(G)$ je najmenší stupeň grafu.

Riešenia

1. Neexistujú:
c) nemôže mať tri vrcholy nepárneho stupňa
d) vrchol stupňa 7 má len 6 ďalších, s ktorými môže byť spojený
e) dva vrcholy stupňa 6 musia byť spojené s každým ostatným, čo poruší stupeň 1. f) z vrcholov stupňov 8, 7, 7, 6 vychádza aspoň $5 + 4 + 4 + 3 = 16$ hrán, ale do zvyšných vrcholov môže vchádzať najviac $3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$ hrán

2. Graf rádu n nemôže mať vrchol stupňa 0 a aj $n - 1$.

3. Musí platiť $n > k$ a ak n je nepárne, tak k musí byť párne.

4. $2^{n(n-1)/2}$

5. $\binom{n(n-1)/2}{k}$

6. $K_{3,3}$ a K_4, kde sme jeden vrchol nahradili trojuholníkom.

7. Triedy izomofných grafov sú {a), d), e)}, {b)}, {c)}, {f)}
f) obsahuje ako jediný 5 vrcholov
b), c) obsahujú kružnice dĺžky 4, pričom v grafe c) sa každá hrana nachádza v nejakej kružinici dĺžky 4.

9. Ak by ležal na viacerých, tak vrchol, v ktorom sa kružnice rozpoja, má veľký stupeň.

10. Grafy, v ktorých každý komponent je buď C_3, alebo hviezda – graf, kde je jeden vrchol spojený s hranou s ďalšími i vrcholmi (a žiadne iné hrany neobsahuje), $i \geq 0$

11.