Cvičenie 10: Grafy II – stromy, bipartitné a eulerovské grafy

→ **Úloha 1.** Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n-1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.

Úloha 2. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov u, v platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$. Dokážte, že G musí byť nutne súvislý.

→ **Úloha 3.** Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?

→ **Úloha 4.** Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

b) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

c) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj ťah začínajúci v u a končiaci vo v.

d) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

e) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

Úloha 5. Dokážte, že ak graf $G = (V, E)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

Úloha 6. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.

→ **Úloha 7.** Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý. (Komplementárny graf grafu G je taký graf G', pre ktorý platí $V(G') = V(G)$ a $E(G') = \binom{V}{2} - E(G)$.)

Úloha 8. Dokážte, že

a) pre každý jednoduchý graf o n vrcholoch, e hraných a k komponentoch platí $n - k \leq e \leq (n-k+1)(n-k)/2$ a

b) pre všetky l také, že $n-k \leq l \leq (n-k+1)(n-k)/2$ existuje graf o n komponentoch, l hranách a k komponentoch.

Stromy

Definícia 1. Graf $G = (V, E)$ je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

Veta 1. *Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) G je strom.

(ii) Ľubovoľné dva vrcholy grafu G sú spojené práve jednou cestou.

(*iii*) *Graf G je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu G nesúvislý graf. (G je minimálne súvislý)*

(*iv*) *Graf G je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica. (G je maximálne acyklický)*

(*v*) *G je súvislý graf rádu $n \in \mathbb{N}$ s $n-1$ hranami.*

Definícia 2. Nech $T = (V, E)$ je strom. *List* je ľubovoľný vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 1$.

→ **Úloha 9.** Dokážte, že každý netriviálny strom má aspoň dva listy.

→ **Úloha 10.** Dokážte, že strom s n vrcholmi má práve $n-1$ hrán.

Úloha 11. O strome T vieme, že má

- 4 vrcholy stupňa 2,
- 2 vrcholy stupňa 3,
- 7 vrcholov stupňa 4,
- maximálny stupeň 4.

Koľko môže mať strom T listov?

Úloha 12. Nájdite všetky stromy $T = (V, E)$ obsahujúce vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 0$.

Úloha 13. Koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom na n vrcholoch?

→ **Úloha 14.** Dokážte, že každý strom T má aspoň $\Delta(T)$ listov.

Úloha 15. Nájdite všetky regulárne stromy.

Úloha 16. Dokážte vetu 1.

Úloha 17. Dokážte, že vrcholy stromu možno očíslovať $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že pre každé $i \geq 2$ má vrchol v_i práve jedného suseda v množine $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$.

Bipartitné grafy

Úloha 18. Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

→ **Úloha 19.** Dokážte, že každý k-regulárny bipartitný graf ($k \geq 1$) musí mať párny počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

→ **Úloha 20.** Nech G je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

→ **Úloha 21.** Nech G je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľnú hranu, tak ostane súvislý.

Úloha 22. Je riešenie nasledovnej úlohy správne?

Zadanie. Dokážte, že každý n-vrcholový graf G s $\delta(G) \geq 3$ obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Riešenie. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n. Graf s minimálnym stupňom vrchola 3 musí mať aspoň 4 vrcholy. Ak $n = 4$, tak $G = K_4$ (úplný graf na 4 vrcholov), ktorý obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké n a dokážeme, že platí aj pre $n+1$. Vezmime si n-vrcholvý graf G s minimálnym stupňom aspoň 3. Podľa indukčného predpokladu obsahuje kružnicu dĺžky 4. Ak do grafu G pridáme nový vrchol stupňa aspoň 3, tak dostaneme $(n+1)$-vrcholový graf G'. Nový graf G' má tiež minimálny stupeň aspoň 3 (lebo sme len pridali hrany) a stále obsahuje kružnicu dĺžky 4. Tvrdenie teda platí aj pre $n+1$, čím je dôkaz indukciou hotový.

Riešenia

1. Každé dva nesusedné vrcholy majú spoločného suseda.

2. Podobne ako predchádzajúca úloha.

3. Spojnica najdlhších ciest ich rozdelí každú na dva úseky. Zoberte dlhšie z nich. Hranu nemusia mať spoločnú.

4. a) Áno – zoberte si najkratší u-v-sled, ktorý nie je cestou a nájdite kratší
b) Áno, je to dôsledok a)
c) Áno, je to dôsledok a).
d) Nie – Napr. ťah u, x, u.
e) Áno, znovu stačí uvažovať najkratší ťah

5. Nájdite v ňom kružnicu. Ak má párnu dĺžku, tak využite vo zvyšku sledu indukčný predpoklad.

6. $(n-1)(n-2)/2$: ak má jeden komponent veľkosť a, tak graf môže mať najviac $a(a-1)/2 + (n-a)(n-a-1)/2 = 2a^2 - 2an + n(n-1)/2$ hrán, čo nadobúda maximum pre $a = 1$ a $a = n-1$. Dosiahne sa na grafe $K_{n+1}+$ izolovaný vrchol.

7.

11. 18

12. 1-vrhcolový graf

13. Najmenej 2: cesta. Najviac $n-1$: hviezda.

14. Zoberte si vrchol najväčšieho stupňa a nájdite listy v podstromoch, ktoré sú naň zavesené

15. 1-vrcholový graf

19. Spočítame počet hrán a vyjde, že jeho partície musia byť rovnako veľké.

20.

21.

Riešenie úlohy 4a)

Ukážka dvoch spôsobov, ako spisovať dôkazy, kde opakujeme nejaký krok. Hlavná myšlienka je vyznačená modrou, spoločná pre obe riešenia.

Matematická indukcia

Nech u, v sú vrcholy grafu G. Úplnou matematickou indukciou podľa n dokážeme, ža ak v grafe G existuje u-v-sled dĺžky n, tak existuje v ňom aj u-v-cesta. Pre $n = 0$ tvrdenie zjavne platí (sled (u) je aj cestou).

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky $n < k$, pre nejaké $k > 0$. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre $n = k$. Nech teda $P = (u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k = v)$ je u-v sled dĺžky k. Ak sa v ňom neopakujú vrcholy, tak ide o cestu a dôkaz je hotový. Predpokladajme teda, že sled P nie je cestou, teda že pre nejaké $i < j$ platí $v_i = v_j$. Potom $P' = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i = v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ je u-v-sled dĺžky kratšej ako k. Preto podľa indukčného predpokladu existuje u-v-cesta v grafe G. Tým je dôkaz indukciou dokončený

Extremálny princíp

Nech u, v sú vrcholy grafu G a nech $P = (u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k = v)$ je najkratší u-v-sled grafu G (ktorý existuje, keďže aspoň jeden u-v-sled v grafe G máme). Predpokladajme teda, že sled P nie je cestou, teda že pre nejaké $i < j$ platí $v_i = v_j$. Potom $P' = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i = v_j, e_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ je u-v-sled dĺžky kratšej ako k. To je v spore s tým, že P je najkratší u-v-sled. Preto P musí byť cesta.