# Cvičenie 11: Grafy II – stromy, bipartitné a eulerovské grafy

**Úloha 1.** Je riešenei nasledovnej úlohy správne?

*Zadanie.* Dokážte, že každý $n$-vrcholový graf $G$ s $\delta(G) \geq 3$ obsahuje kružnicu dĺžky 4.

*Riešenie.* Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa $n$. Graf s minimálnym stupňom vrchola 3 musí mať aspoň 4 vrcholy. Ak $n = 4$, tak $G = K_4$ (úplný graf na 4 vrcholov), ktorý obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké $n$ a dokážeme, že platí aj pre $n+1$. Vezmime si $n$-vrcholvý graf $G$ s minimálnym stupňom aspoň 3. Podľa indukčného predpokladu obsahuje kružnicu dĺžky 4. Ak do grafu $G$ pridáme nový vrchol stupňa aspoň 3, tak dostaneme $(n+1)$-vrcholový graf $G'$. Nový graf $G'$ má tiež minimálny stupeň aspoň 3 (lebo sme len pridali hrany) a stále obsahuje kružnicu dĺžky 4. Tvrdenie teda platí aj pre $n+1$, čím je dôkaz indukciou hotový.

## Stromy

**Definícia 1.** Graf $G = (V, E)$ je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

**Veta 1.** *Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(*i*) *$G$ je strom.*

(*ii*) *Ľubovoľné dva vrcholy grafu $G$ sú spojené práve jednou cestou.*

(*iii*) *Graf $G$ je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu $G$ nesúvislý graf. ($G$ je minimálne súvislý)*

(*iv*) *Graf $G$ je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica. ($G$ je maximálne acyklický)*

(*v*) *$G$ je súvislý graf rádu $n \in \mathbb{N}$ s $n-1$ hranami.*

**Definícia 2.** Nech $T = (V, E)$ je strom. *List* je ľubovoľný vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 1$.

→ **Úloha 2.** Dokážte, že každý netriviálny strom má aspoň dva listy.

→ **Úloha 3.** Dokážte, že strom s $n$ vrcholmi má práve $n-1$ hrán.

**Úloha 4.** O strome $T$ vieme, že má

- 4 vrcholy stupňa 2,
- 2 vrcholy stupňa 3,
- 7 vrcholov stupňa 4,
- maximálny stupeň 4.

Koľko môže mať strom $T$ listov?

**Úloha 5.** Nájdite všetky stromy $T = (V, E)$ obsahujúce vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 0$.

**Úloha 6.** Koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom na $n$ vrcholoch?

→ **Úloha 7.** Dokážte, že každý strom $T$ má aspoň $\Delta(T)$ listov.

**Úloha 8.** Nájdite všetky regulárne stromy.

**Úloha 9.** Dokážte vetu 1.

**Úloha 10.** Dokážte, že vrcholy stromu možno očíslovať $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že pre každé $i \geq 2$ má vrchol $v_i$ práve jedného suseda v množine $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$.

**Definícia 3.** Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Kostra grafu $G$* je ľubovoľný strom $T$, ktorý je faktorom grafu $G$.

**Úloha 11.** Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a $T$ je jeho kostra. Dokážte, že $\operatorname{diam}(T) \geq \operatorname{diam}(G)$.

**Úloha 12.** Dokážte alebo vyvráťte: každý súvislý graf $G = (V, E, I)$ má aspoň jednu kostru $T$ takú, že $\operatorname{diam}(T) = \operatorname{diam}(G)$.

# Bipartitné grafy

**Úloha 13.** Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$.

→ **Úloha 14.** Dokážte, že každý $k$-regulárny bipartitný graf ($k \geq 1$) musí mať párny počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

→ **Úloha 15.** Nech $G$ je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

→ **Úloha 16.** Nech $G$ je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľnú hranu, tak ostane súvislý.

# Eulerovské grafy

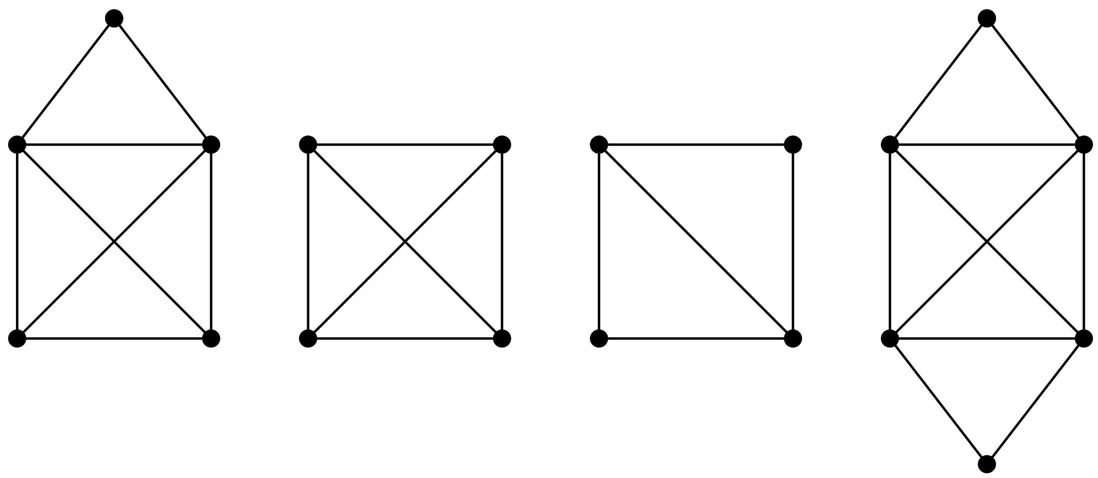
**Definícia 4.** Súvislý graf $G = (V, E)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany (*eulerovský ťah*).

**Veta 2.** *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. Graf $G$ je eulerovský práve vtedy, keď sú stupne všetkých jeho vrcholov párne.*

**Veta 3.** *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. V grafe $G$ existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany práve vtedy, keď v grafe $G$ existujú práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

**Definícia 5.** *Hranový graf* $L(G)$ grafu $G$ je graf, ktorého vrcholmi sú hrany grafu $G$ a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď hrany, ktoré sú reprezentované vrcholmi $L(G)$, majú spoločný vrchol.

→ **Úloha 17.** Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



→ **Úloha 18.** Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

→ **Úloha 19.** Dokážte vetu 3.

→ **Úloha 20.** Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf $K_n$ je eulerovský.

→ **Úloha 21.** Dokážte alebo vyvráťte masledujúce implikácie:

1. Graf $G$ je eulerovský $\Rightarrow$ hranový graf $L(G)$ je eulerovský.
2. Hranový graf $L(G)$ je eulerovský $\Rightarrow$ graf $G$ je eulerovský.

**Úloha 22.** Keď chceme povedať, že premenné $a$, $b$, $c$ majú navzájom rôzne hondoty, tak na to často používame zápis $a \neq b \neq c \neq a$. Zápis $a \neq b \neq c$ nestačí, lebo relácia $\neq$ nie je tranzitívna a nevyplýva z neho, že $a \neq c$. Nájdite všetky kladné celé čísla $n$, pre ktoré vieme zapísať, že $n$ premenných je navzájom rôznych, s využitím $\binom{n}{2}$ symbolov $\neq$ (pre $n = 3$ teda máme vyššie príklad vyhovujúceho zápisu).

→ **Úloha 23.** Nech $M = \{1, 2, \dots, 17\}$. Dokážte, že existuje postupnosť prvkov množiny $\binom{M}{5}$, v ktorej sa každá dvojca navzájom disjunktných 5-prvkových podmnožín množiny $M$ nachádza práve raz vedľa seba.

**Úloha 24.** Hypotéza o dvojitom pokrytí kružnicami hovorí, že pre každý graf $G$, ktorý neobsahuje most, existuje množina kružníc multimnožina $\mathcal{K}$ taká, že každá hrana grafu $G$ sa nachádza práve v dvoch kružniciach z $\mathcal{K}$. Dokážte, že táto hypotéza platí pre eulerovské grafy. (*Most* je taká hrana grafu, ktorej odstránením sa zvýši počet komponentov.)

## Riešenia

**4.** 18

**5.** 1-vrhcolový graf

**6.** Najmenej 2: cesta. Najviac $n-1$: hviezda.

**7.** Zoberte si vrchol najväčšieho stupňa a nájdite listy v podstromoch, ktoré sú naň zavesené

**8.** 1-vrcholový graf

**14.** Spočítame počet hrán a vyjde, že jeho partície musia byť rovnako veľké.

**15.**

**16.**