

Bonus 1

Termín: utorok 13. 5. 2025 23:59

Špeciálne pokyny

Výnimka z pravidiel. Pri tomto bonuse môžete využívať nástroje umelej inteligencie vrátane kopírovania vygenerovaných riešení. V takom prípade všetok obsah riešenia, ktorí ste nepísali samostatne, musí byť jasne označený s uvedeným zdrojom. V prípade AI uveďte názov a verziu použitého modelu a prompty (resp. kľudne aj celú konverzáciu), ktoré ste jej zadávali.

Pripomíname, že bez dôkazu sa môžete odvolávať len na tvrdenia z prednášky alebo skript, príp. zo slovenskej stredoškolskej matematiky.

Do každej úlohy môžete uviesť:

1. **Riešenie úlohy**, teda všetko to, čo dokáže, že váš výsledok je správny. Resp. môžete uviesť správne a dokázané čiastkové tvrdenia. Dôkazy enumeračných úloh nemusia byť formálne. Výsledok uveďte v čo najjednoduchšom tvare (môže to byť aj suma, ak sa nedá inak).
2. **Doplňujúce poznámky** obsahujúce všetko to, čím sa chcete pochváliť, že sa vám podarilo o úlohe zistiť a nie sú to korektné dôkazy. Napr. ako ste na riešenie prišli; slepé cesty; nesprávne riešenia, ktoré ste získali od AI spolu s identifikáciou chýb; vaše nepodložené domienky o riešení. Tieto veci by sa však nemali objaviť v časti s riešením úlohy.

Bodovanie. Základom hodnotenia riešenia každej úlohy je 0,5 b, ktoré dostanete za správne riešenie podľa pokynov a pravidiel (aj pokiaľ je celé vygenerované AI). Avšak **za nesprávne riešenie môžete dostať −0,5 b**. Ak do riešenia nenapíšete nič, tak dostanete za riešenie danej úlohy 0 b. Cieľom je, aby ste si rozmysleli, či je vaše alebo AI riešenie správne a odovzdali len to, čím ste si dostatočne istí. Okrem toho plánujem udeľovať ďalšie body podľa náročnosti úlohy, doplňujúcich poznámok a kvality samotného textu.

Úlohy sú rôzne náročné, no nie až tak ako úloha o dláždení v 1. bonusovej sade.

Úloha 1. Nech $A_1A_2 \dots A_n$ je pravidelný n -uholník, kde $n \geq 3$ je celé číslo. Pomocou niekoľkých jeho uhlopriečok ho rozdelíme na trojuholníky, z ktorých každý má vrcholy vo vrcholoch n -uholníka a aspoň jednu stranu spoločnú s n -uholníkom $A_1A_2 \dots A_n$. Koľkými spôsobmi ho možno takto rozdeliť?

Úloha 2. Koľko existuje n -prvkových postupností $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ zložených z prvkov 0 a 1 takých, že pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí, že postupnosť $(a_1, a_2, \dots, a_i)$ obsahuje aspoň toľko prvkov 1 ako prvkov 0?

Úloha 3. V závislosti od prirodzených čísel n, k vypočítajte sumu

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i-1}{i} \binom{n+k-i-1}{k-i}.$$

Úloha 4. Koľko existuje permutácií čísel $0, 1, 2, \dots, 3n$ (chápaných ako postupností), ktoré obsahujú súvislú podpostupnosť $(0, 1, 2, 3)$ alebo obsahujú súvislú podpostupnosť $(3k-2, 3k-1, 3k)$ pre nejaké $k \in \{2, 3, \dots, n\}$?