Riešenie sady domácich úloh z UKTG č. 1

Úloha 1

> *(2 body)* Nech n je prirodzené číslo. Na začiatku máme jednu kôpku s n žetónmi. V jednom kroku si vyberieme ľubovoľnú kôpku s aspoň 2 žetónmi a rozdelíme ju na dve neprázdne kôpky, jednu s a žetónmi a druhú s b žetónmi. Za takýto krok získame ab bodov. Tento krok opakujeme do vtedy, dokým všetky kôpky neobsahujú len jeden žetón. Dokážte, že bez ohľadu na to, aké kroky sme vykonávali, za celý tento proces získame presne $\frac{1}{2}n(n-1)$ bodov.
>
> *Príklad.* Na začiatku máme kôpku so 10 žetónmi. V prvom kroku ju rozdelíme napríklad na dve kôpky s 3 a 7 žetónmi, za čo získame $3 \cdot 7 = 21$ bodov. V druhom kroku si vyberieme napríklad kôpku so 7 žetónmi a rozdelíme ju na 2 a 5 žetónov, čím získame $2 \cdot 5 = 10$ bodov.

Na začiatok vyjasníme jednu nepresnosť zadaní (ktorá našťastie nikomu nerobila problémy). Pre $n = 0$ tvrdenie neplatí, ak ho presne berieme – máme jednu kôpku z 0 žetónmi a 1 žetón v nej nedostaneme. Ale na to sa vieme dívať tak, že nemáme žiadnu kôpku a vtedy už na začiatku platí, že v každej kôpke je jeden žetón. Vo zvyšku riešenia budeme uvažovať $n \geq 1$.

Tvrdenie dokážeme úplnou matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 1$ máme jednu kôpku s 1 žetónom, čiže sme skončili a získali sme $0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0$ bodov, čiže tvrdenie platí.

Indukčný krok Uvažujme celé číslo $k \geq 2$.

Predpokladáme, že pre každé $n \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ platí, že ak začíname s kôpkou s n žetónmi, tak po ľubovoľnej postupnosti krokov podľa zadania získame $\frac{1}{2}n(n-1)$ bodov (indukčný predpoklad).

Teraz dokážeme, že rovnaký záver platí pre kôpku s k žetónmi. V prvom kroku rozdelíme kôpku na dve kôpky, jednu s ℓ žetónmi a druhú s $k-\ell$ žetónmi, pričom získame $\ell(k-\ell)$ bodov. Ďalej budeme robiť kroky s týmito dvomi kôpkami. Keďže tieto dve kôpky sú nezávislé a $1 \leq k, k\ell \leq k-1$, tak z indukčného predpokladu vieme, že z prvej kôpky veľkosti ℓ získame $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ bodov a z druhej kôpky veľkosti $k-\ell$ získame $\frac{1}{2}(k-\ell)(k-\ell-1)$ bodov. Náš celkový zisk bodov tak je

$$\begin{gathered}
\ell(k-\ell) + \tfrac{1}{2}\ell(\ell-1) + \tfrac{1}{2}(k-\ell)(k-\ell-1) = \\
\tfrac{1}{2} \cdot [2\ell(k-\ell) + \ell(\ell-1) + (k-\ell)(k-\ell-1)] = \\
\tfrac{1}{2} \cdot [2k\ell - 2\ell^2 + \ell^2 - \ell + k^2 - k\ell - k - k\ell + \ell^2 + \ell] = \\
\tfrac{1}{2}(k^2-k).
\end{gathered}$$

A to sme mali dokázať. Dôkaz úplnou mat. indukciou je tak hotový.

Úloha 2

(2 body) Koľko najmenej čísel (navzájom rôznych) musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 22\}$, aby zaručene existovala dvojica čísel, ktorých rozdiel je 3, 4 alebo 7. Vaše tvrdenie dokážte.

Bonus. *(1 bod)* Vyriešte úlohu všeobecne pre množinu $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dávame do pozornosti, že v úlohe 2 za dôkaz preverením všetkých možností pomocou počítača neudelíme plný počet bodov.

Ukážeme, že riešením je 9.

Dolný odhad. Ak vyberieme 8 čísel $1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22$, tak ľahko skontrolujeme (preverením všetkých možností), že medzi nimi nie sú dve s rozdielom 3, 4 ani 7. Teda vyberať 8 čísel nám nestačí.

Horný odhad. Teraz ukážeme, Že ak vyberieme ľubovoľných 9 čísel z množiny $M = \{1, 2, \dots, 22\}$, tak budú existovať 2 vybrané čísla z rozdielom 3, 4 alebo 7. Rozložme si množinu M na nasledovných 8 tried:

$$\{1, 4, 8\}, \quad \{2, 5, 9\}, \quad \{3, 6, 10\}, \quad \{7, 11\}, \quad \{12, 15, 19\}, \quad \{13, 16, 20\}, \quad \{14, 17, 21\}, \quad \{18, 22\}.$$

Ľahko skontrolujeme, že v každej triede majú každé dve čísla rozdiel 3, 4 alebo 7. Z Dirichletovho princípu vyplýva, že ak vyberieme ľubovoľných 9 čísel, čo viac ako počet tried, tak existujú dve vybrané čísla z rovnakej triedy a tie teda majú rozdiel 3, 4 alebo 7.

Bonus

Pre $n \leq 3$ hľadaný najmenší počet čísel neexistuje, lebo v samotnej množine $M_n := \{1, 2, \dots, n\}$ neexistujú dve čísla s rozdielom 3, 4 alebo 7. Ukážeme, že riešením pre $n \geq 4$ je

$$3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3) + 1.$$

Túto hodnotu získame zovšeobecnením konštrukcie nevyhovujúceho výberu 8 čísel pre $n = 22$. Priamo teda tak vieme získať dolný odhad.

Dolný odhad. Uvažujme množinu A, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla končiace sa na 1, 2 alebo 3, teda

$$A = \{10k + z;\ k \in \mathbb{N} \wedge z \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Ukážeme, že množina A neobsahuje žiadne dve čísla s rozdielom 3, 4 alebo 7. Vezmime si dve čísla $10k_1 + z_1 < 10k_2 + z_2 \in A$ pre $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ a $z_1, z_2 \in \{1, 2, 3\}$. Ak sú v rovnakej desiatke, teda ak $k_1 = k_2$, tak ich rozdiel je najviac $z_2 - z_1 = 2$. Ak sú v iných desiatkach, tak ich rozdiel je $10k_2 + z_2 - 10k_1 - z_1 = 10(k_2 - k_1) + z_2 - z_1 \geq 10 + 1 - 3 = 8$. V oboch prípadoch ich rozdiel nie je 3, 4 ani 7. Potom zjavne pre každé $n \geq 4$ množina $A \cap M_n$ obsahuje $3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3)$ čísel a žiadnu dvojicu so želaným rozdielom. Musíme teda z M_n vybrať viac čísel.

Horný odhad. Pre horný odhad sa nám nepodarí zovšeobecniť naše riešenie pre $n = 22$. Použijeme však iný prístup. Miesto delenia na triedy, kde chceme mať aspoň 2 čísla, budeme hľadať triedy, kde chceme mať aspoň 4 čísla. Na to sa nám prirodzene ponúkne 10 za sebou idúcich čísel. Oproti dôkazu v riadnej časti ho sformulujeme v pozitívnom svetle, kde ukážeme, že ak vyberieme čísla bez rozdielu 3, 4 alebo 7, tak sme ich vybrali najviac $3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3)$.

Ukážeme, z ľubovoľnej množiny $\{a+1, a+2, \dots, a+10\}$, kde $a \in \mathbb{N}$, môžeme vybrať najviac tri čísla tak, aby sme nemali dvojicu s rozdielom 3, 4 alebo 7. Toto tvrdenie sa dá ľahko ukázať preverením všetkých možností. Jeden zo stručných dôkazov je sporom, kde uvažujeme nasledovné dve rozklady:

$$\{a+1, a+4, a+8\}, \quad \{a+2, a+5, a+9\}, \quad \{a+3, a+6, a+10\}, \quad \{a+7\},$$

$$\{a+1, a+5, a+8\}, \quad \{a+2, a+6, a+9\}, \quad \{a+3, a+7, a+10\}, \quad \{a+4\}.$$

Opäť každá trieda obsahuje len dvojice so spornými rozdielmi 3, 4 alebo 7. Ak vyberieme dve čísla z rovnakej triedy, tak máme sporný rozdiel. Ak by teda existoval výber štyroch čísel bez sporného rozdielu, tak keďže oba rozklady majú 4 triedy, musíme z každej triedy vybrať jedno číslo. Špeciálne, musíme vybrať číslo $a + 7$ aj číslo $a + 4$, no ich rozdiel je $a + 7 - a - 4 = 3$, čo je spor. Zjavne najviac 3 čísla vieme vybrať aj z množiny menej ako 10 za sebou idúcich čísel.

Množinu M_n si teda rozdelíme na $\lfloor n/10 \rfloor + 1$ tried, kde trieda T_i obsahuje tie čísla z množiny M_n, ktorých celočíselný podiel po delení 10 je $i \in \{0, 1, \dots, \lfloor n/10 \rfloor\}$. Predpokladajme, že vyberieme čísla z množiny M_n tak, že medzi žiadnymi dvomi nie je rozdiel 3, 4 ani 7. Keďže množina T_i pre $0 \leq i < \lfloor n/10 \rfloor$ obsahuje práve 10 za sebou idúcich čísel, tak sme z nej mohli vybrať najviac 3 čísla. Takisto môžeme najviac 3 čísla vybrať z množiny $T_{\lfloor n/10 \rfloor}$, keďže obsahuje $n \bmod 10$ čísel. Ale taktiež platí, že z nej môžeme vybrať najviac $n \bmod 10$ čísel, čo spolu s predošlou vetou dáva najviac $\min(n \bmod 10, 3)$ čísel. Celkovo tak vieme vybrať najviac $3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3)$ čísel. Teda ak vyberieme $3\lfloor n/10 \rfloor + \min(n \bmod 10, 3) + 1$ čísel, tak máme zaručenú existenciu rozdielu 3, 4 alebo 7.

Úloha 3

(2 body) Určte počet všetkých 3-ciferných čísel takých, že

a) ich cifry sú z množiny $\{1, 2, 4, 7\}$ a obsahujú práve jednu nepárnu cifru;

b) ich cifry sú z množiny $\{0, 2, 5, 8\}$ a posledná (tretia) cifra sa líši od prvých dvoch (prvá a druhá cifra však môžu byť rovnaké);

c) ich cifry sú z množiny $\{1, 2, 3\}$ a majú aspoň dve cifry rovnaké.

V každej úlohe uveďte formálny dôkaz vášho výsledku a tiež aj vypíšte všetky možnosti. Vypísať možnosti môžete dvomi spôsobmi

- ručne – vtedy musí byť vidno systém, akým ste možnosti vypisovali;
- pomocou počítača – vtedy odovzdajte aj programy, ktoré ste pri výpise možností použili.

Ideálne by mal systém vypisovania možností (či už ručný systém alebo program) korešpondovať s vašim formálnym odvôdnením.

Trojciferné číslo môžete formálne považovať za usporiadanú trojicu cifier, pričom prvá cifra musí byť nenulová.

Riešenie a)

Nech $P = \{2, 4\}$ a $N = \{1, 7\}$. Hľadanú množinu 3-ciferných čísel A rozdelíme na tri po dvoch disjunktné podmnožiny podľa toho, na ktorej pozícii obsahujú svoju jedinú nepárnu cifru. Tie potom vyjadríme ako

$$N \times P \times P \cup P \times N \times P \cup P \times P \times N.$$

Podľa pravidla súčtu a súčinu tak množina A má počet prvkov

$$\begin{gathered}
|N \times P \times P \cup P \times N \times P \cup P \times P \times N| = \\
= |N \times P \times P| + |P \times N \times P| + |P \times P \times N| = \\
= |N| \cdot |P| \cdot |P| + |P| \cdot |N| \cdot |P| + |P| \cdot |P| \cdot |N| = \\
= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3 = 24.
\end{gathered}$$

Riešenie b)

Nech $M = \{0, 2, 5, 8\}$. Hľadanú množinu všetkých možností B rozložíme na štyri triedy rozkladu B_0, B_2, B_5 a B_8 podľa ich poslednej cifry. Platí:

- $B_0 = (M - \{0\}) \times (M - \{0\}) \times \{0\}$, čiže podľa pravidla súčinu $|B_0| = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$.
- Pre každé $c \in \{2, 5, 8\}$ platí $M_c = (M - \{0, c\}) \times (M - \{c\}) \times \{c\}$, teda podľa pravidla súčinu $|M_c| = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$.

Podľa pravidla súčtu tak máme

$$|B| = |B_0 \cup B_2 \cup B_5 \cup B_8| = |B_0| + |B_2| + |B_5| + |B_8| = 9 + 6 + 6 + 6 = 27.$$

Riešenie b) cez zovšeobecnené pravidlo súčinu

Nech $M = \{0, 2, 5, 8\}$. Hľadanú množinu všetkých možností B rozložíme na dve disjunktné podmnožiny B_1 a B_2.

Množina B_1 bude obsahovať čísla, ktoré majú prvé dve cifry rovnaké, teda

$$B_1 = \{(a, a, b);\ a \in M - \{0\} \wedge b \in M - \{a\}\}.$$

Keďže $|M - \{0\}| = 3$ a $|M - \{a\}| = 3$ pre každú voľbu a (a aj preto, že zobrazenie $(a, b) \mapsto (a, a, b)$ je bijekcia), tak podľa zovšeobecneného pravidla súčinu $|B_1| = 3 \cdot 3 = 9$.

Množina B_2 bude obsahovať čísla, ktoré majú prvé dve cifry rôzne, teda

$$B_2 = \{(a, b, c);\ a \in M - \{0\} \wedge b \in M - \{a\} \wedge c \in M\{a, b\}\}.$$

Keďže vždy platí $|M - \{0\}| = 3$, $|M - \{a\}| = 3$ a $|M - \{a, b\}| = 2$, tak podľa zovšeobecneného pravidla súčinu $|B_2| = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

Na záver podľa pravidla súčtu máme $|B| = |B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| = 9 + 18 = 27$.

Riešenie c) cez zovšeobecnené pravidlo súčinu

Nech $M = \{1, 2, 3\}$. Hľadanú množinu všetkých možností C rozložíme na štyri disjunktné podmnožiny.

Množina C_1 bude obsahovať čísla so všetkými tromi ciframi rovnakými, teda $C_1 = \{(a, a, a);\ a \in M\}$ a $|C| = 3$.

Množina C_2 bude obsahovať čísla, kde sú prvé dve cifry rovnaké a tretia je od nich rôzna. Tieto čísla dostaneme tak, že zvolíme

- $a \in M$: 3 možnosti,
- $c \in M - \{a\}$: 2 možnosti

a vytvoríme číslo (a, a, c). Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu $|C_2| = 3 \cdot 2 = 6$.

Ďalej pokračujeme s množinou C_3, ktorá obsahuje čísla s rovnakou 1. a 3. cifrou a odlišnou 2. cifrou, a množinou C_4 s rovnakou 2. a 3. cifrou a odlišnou 1. cifrou. Ich počty vieme určiť analogicky alebo na základe bijekcií na C_2. Teda $|C_2| = |C_3| = |C_4| = 6$.

Podľa pravidla súčtu tak máme $|C| = 3 + 6 + 6 + 6 = 21$.

Riešenie c) cez pravidlo rozdielu

Hľadanú množinu všetkých možností C vieme vyjadriť ako

$$C = M^3 - R,$$

kde M^3 je množina všetkých trojciferných čísel a R je množina všetkých trojciferných čísel, teda usporiadaných trojíc z M^3, s navzájom rôznymi ciframi. Množina R je ekvivalentná s množinou variácií bez opakovania 3. triedy prvkov z M, teda $|R| = 3! = 6$. Keďže $R \subseteq M^3$, tak podľa pravidla rozdielu (a súčinu pre $|M^3|$)

$$|C| = |M^3| - |R| = 3^3 - 6 = 21.$$

Programy vypisujúce možnosti

Programy v C++ k vypisujúce všetky možnosti môžete nájsť na adrese `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/uktg24/du/du1_3_programy.cpp` Programy sú postavené tak, aby čo najlepšie zodpovedali riešeniam uvedeným v tomto dokumente. Tiež sme v nich nevyužívali žiadne pokročilé veci. Napr. ak sme chceli prejsť cez všetky prvky množiny $M - \{a\}$, tak sme `for` cyklom prešli všetky prvky množiny M a iteráciu, kde sme narazili na a sme preskočili cez `continue`. Dôležité je, že takto stále vieme určiť, že takýto cyklus vykoná presne $|M| - 1$ nepreskočených iterácií. Teda o takýchto programoch vieme určiť, koľko možností vypíšu aj bez toho, aby sme ich spustili.