

Sada domácich úloh z UKTG č. 1

Termín: streda 20. 3. 2023, 23:59

Úloha 1. (2 body) Nech n je prirodzené číslo. Na začiatku máme jednu kôpku s n žetónmi. V jednom kroku si vyberieme ľubovoľnú kôpku s aspoň 2 žetónmi a rozdelíme ju na dve neprázdne kôpky, jednu s a žetónmi a druhú s b žetónmi. Za takýto krok získame ab bodov. Tento krok opakujeme do vtedy, dokým všetky kôpky neobsahujú len jeden žetón. Dokážte, že bez ohľadu na to, aké kroky sme vykonávali, za celý tento proces získame presne $\frac{1}{2}n(n-1)$ bodov.

Príklad. Na začiatku máme kôpku so 10 žetónmi. V prvom kroku ju rozdelíme napríklad na dve kôpky s 3 a 7 žetónmi, za čo získame $3 \cdot 7 = 21$ bodov. V druhom kroku si vyberieme napríklad kôpku so 7 žetónmi a rozdelíme ju na 2 a 5 žetónov, čím získame $2 \cdot 5 = 10$ bodov.

Úloha 2. (2 body) Koľko najmenej čísel (navzájom rôznych) musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 22\}$, aby zaručene existovala dvojica čísel, ktorých rozdiel je 3, 4 alebo 7. Vaše tvrdenie dokážte.

Bonus. (1 bod) Vyriešte úlohu všeobecne pre množinu $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dávame do pozornosti, že v úlohe 2 za dôkaz prevereníím všetkých možností pomocou počítača neudelíme plný počet bodov.

Úloha 3. (2 body) Určte počet všetkých 3-ciferných čísel takých, že

- ich cifry sú z množiny $\{1, 2, 4, 7\}$ a obsahujú práve jednu nepárnu cifru;
- ich cifry sú z množiny $\{0, 2, 5, 8\}$ a posledná (tretia) cifra sa líši od prvých dvoch (prvá a druhá cifra však môžu byť rovnaké);
- ich cifry sú z množiny $\{1, 2, 3\}$ a majú aspoň dve cifry rovnaké.

V každej úlohe uveďte formálny dôkaz vášho výsledku a tiež aj vypíšte všetky možnosti. Vypísať možnosti môžete dvomi spôsobmi

- ručne – vtedy musí byť vidno systém, akým ste možnosti vypisovali;
- pomocou počítača – vtedy odovzdajte aj programy, ktoré ste pri výpise možností použili.

Ideálne by mal systém vypisovania možností (či už ručný systém alebo program) korešpondovať s vašim formálnym odvodnením.

Trojciferné číslo môžete formálne považovať za usporiadanú trojicu cifier, pričom prvá cifra musí byť nenulová.