

Úlohy k cvičeniu č. 2

Veta 1 (Pravidlo súčtu). *Nech $n \in \mathbb{N}$ a X_1, X_2, \dots, X_n sú po dvoch disjunktné konečné množiny. Nech X je ich zjednotenie,*

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = \bigcup_{k=1}^n X_k.$$

Potom

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n| = \sum_{k=1}^n |X_k|.$$

Úloha 1. Medveď si môže dať na obed buď jednu z 50 (rozlišiteľných) oviec alebo jedného z troch (rozlišiteľných) valachov (nie však oboje naraz). Z koľkých možností si môže vybrať dohromady?

Úloha 2. Pod grúňom sa pasú dve čriedy o n ovciach a jedna črieda o m ovciach (všetky ovce sú navzájom rozlišiteľné). Koľko možností má medveď, keď chce zjesť práve jednu ovcu?

Veta 2 (Pravidlo súčinu). *Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ a X_1, X_2, \dots, X_n sú ľubovoľné konečné množiny. Potom*

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n| = \prod_{k=1}^n |X_k|.$$

Úloha 3. Hádžeme troma kockami rôznych farieb. Koľko môže padnúť rôznych trojíc čísel?

Úloha 4. Najnovší model lopaty vyrábajú v šiestich výkonnostných a v troch energetických kategóriách, pričom ku každej z výkonnostných kategórií je k dispozícii každá z energetických kategórií. Koľko variantov je na trhu celkovo?

Úloha 5. Medveď sa ráno zdržuje pri salaši S_1 , na obed pri salaši S_2 a večer pri salaši S_3 . Na salaši S_1 majú tridsať oviec, na salaši S_2 sto oviec a na salaši S_3 päťdesiat oviec (všetky ovce sú rozlišiteľné). Medveď si chce dať na raňajky, obed aj večeru práve jednu ovcu. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii?

Úloha 6. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel.

Úloha 7. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry a najviac päť cifier.

Úloha 8. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry, najviac päť cifier a rovnaké posledné dve cifry.

Úloha 9. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b ?

Úloha 10. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa buď začínajú na a , alebo sa súčasne nezačínajú na a a končia na c ?

Úloha 11. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b ?

Úloha 12. Nájdite počet kladných deliteľov čísla 120.

Úloha 13. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^8$.

Úloha 14. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6$.

Úloha 15. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry rôzne.

Úloha 16. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú každé z písmen aspoň raz?

Riešenia

Riešenia úloh sú celkom provizórne. Je možné, že obsahujú nejaké chyby, preklepy. Budem rád, pokiaľ mi každú nezrovnalosť nahlásite mailom na rajnik.zavinac.dcs.fmph.uniba.sk.

1. 53

2. $n + m$

3. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

4. $6 \cdot 3 = 18$

5. $30 \cdot 100 \cdot 50 = 150\,000$

6. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

7. $9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 = 99\,900$

8. 9990

9. $2 \cdot 4^4 = 512$

10. $4^4 + 3 \cdot 4^3 = 448$

11. $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 108$

12. $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

13. $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 810$

14. 13 · 7 · 7 deliteľov ($3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6 = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 7^6$)

15. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

16. $4 \cdot (6 \cdot 10) = 240$