Úlohy k cvičeniu č. 3

Veta 1 (Pravidlo mocnenia)**.** *Nech A, B sú ľubovoľné konečné množiny, $|A| = k$, $|B| = n$. Potom $|B^A| = |B|^{|A|} = n^k$.*

V kombinatorike väčšinou pracujeme s konvenciou $0^0 = 1$ – pravidlo mocnenia tak dáva zmysel aj pre $n = m = 0$, čo súhlasí so skutočnosťou, že existuje jediné zobrazenie medzi dvoma prázdnymi množinami.

Definícia 1 (Variácie s opakovaním)**.** Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné zobrazenie $f: A \to B$, čiže prvok množiny B^A.

Veta 2. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B je n^k.*

Definícia 2 (Variácie bez opakovania)**.** Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné injektívne zobrazenie $f: A \to B$.

Veta 3. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B je*

$$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

Úloha 1. Pod grúňom je 10 salašov a na každom majú 50 (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

Úloha 2. Pod grúňom je n salašov a na každom majú m (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

Úloha 3. Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$?

Úloha 4. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?

Úloha 5. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa končia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 6. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú práve jeden výskyt písmena c?

Úloha 7. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel.

Úloha 8. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých párnych n-ciferných čísel.

Úloha 9. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel deliteľných číslom 4.

Úloha 10. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel deliteľných číslom 5.

Úloha 11. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X?

Úloha 12. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne?

Úloha 13. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré začínajú párnym číslom?

Úloha 14. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré začínajú nepárnym číslom?

Úloha 15. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?

Úloha 16. V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Koľko existuje rôznych ťahov, ak záleží na poradí vytiahnutých čísel?

Úloha 17. Máme $n \geq 7$ kníh, ale len 7 voľných miest na poličke. Koľko máme možností na uloženie kníh na prázdne miesta?

Úloha 18. Koľko prvkov obsahuje množina X taká, že počet variácií bez opakovania druhej triedy z prvkov X je 240?

Úloha 19. Máme množinu, ktorá má x prvkov. Ak sa počet jej prvkov zväčší o 2, tak počet variácií bez opakovania tretej triedy z jej prvkov sa zväčší o 384. Nájdite x.

Definícia 3 (Permutácie bez opakovania)**.** Nech $A = \{1, \ldots, n\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Permutáciou množiny* B nazveme ľubovoľné bijektívne zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže variáciu bez opakovania n-tej triedy z n-prvkov množiny B.

Veta 4. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Počet permutácií množiny B je*

$$n! := n^{\underline{n}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (n-k).$$

Úloha 20. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo práve jedno čierne políčko?

Úloha 21. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 100-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?

Nech A je konečná množina. Zjavne existuje bijekcia medzi podmnožinami množiny A a zobrazeniami $f\colon A \to \{0,1\}$: ku každej podmnožine $B \subseteq A$ totiž môžeme definovať jej *charakteristické zobrazenie* $\chi_B\colon A \to \{0,1\}$ ako

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in B \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \qquad \text{pre všetky } x \in A$$

a naopak, ku každému zobrazeniu $f\colon A \to \{0,1\}$ vieme definovať jeho *nosič* ako množinu

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in A \mid f(a) \neq 0\}.$$

Ľahko vidieť, že obe priradenia $B \mapsto \chi_B$ a $f \mapsto \operatorname{supp}(f)$ sú injektívne (v skutočnosti ide dokonca o navzájom inverzné bijekcie). Podmnožín konečnej množiny A je teda presne toľko, čo prvkov množiny $\{0,1\}^A$. Z pravidla mocnenia potom dostávame:

Dôsledok 1. *Nech A je ľubovoľná konečná množina taká, že $|A| = n$. Potom*

$$|\mathscr{P}(A)| = |\{0,1\}^A| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Z tohto dôvodu sa potenčná množina $\mathscr{P}(A)$ často zvykne označovať aj ako 2^A.

Úloha 22. Koľkými spôsobmi môže vlčia svorka zjesť bližšie neurčený počet z celkového počtu 100 (rozlíšiteľných) oviec?

Veta 5 (Pravidlo rozdielu)**.** *Nech A, U sú ľubovoľné konečné množiny také, že $A \subseteq U$. Potom*
$$|U \setminus A| = |U| - |A|.$$

Úloha 23. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa nekončia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 24. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré neobsahujú práve jeden výskyt písmena c?

Úloha 25. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 4.

Úloha 26. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 5.

Úloha 27. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré obsahujú aspoň jednu z cifier $\{1, 3, 7\}$.

Veta 6 (Zovšeobecnené pravidlo súčinu, formálna verzia)**.** *Nech X je konečná množina. Nech $A \subseteq X^k$, $k \geq 2$, je podmnožina karteziánskeho súčinu X^k, ktorej prvky označíme $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ a ktorá spĺňa podmienky:*

(1) *prvok x_1 je možné z množiny X vybrať n_1 spôsobmi;*

(2) *pre každé $i \in \{1, \dots, k-1\}$, po akomkoľvek výbere usporiadanej i-tice $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ je možné prvok x_{i+1} vybrať vždy n_{i+1} spôsobmi.*

Potom $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Ak by sme chceli vetu 6 formulovať úplne formálne, tak si vieme definovať
$$A_{x_1,\dots,x_i} = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A;\ a_1 = x_1, \dots, a_i = x_i\},$$
teda definujeme množinu tých usporiadaných k-tich z množiny A, ktorých prvých i prvkov je $x_1, \dots, x_i$. Veta by sa potom dala preformulovať aj nasledovne:

Veta 7 (Zovšeobecnené pravidlo súčinu)**.** *Nech X je konečná množina. Nech $A \subseteq X^k$, $k \geq 2$, je podmnožina karteziánskeho súčinu X^k, ktorá spĺňa podmienky:*

(1) *existuje práve n_1 prvkov $x \in X$, pre ktoré $A_x \neq \emptyset$;*

(2) *pre každé $i \in \{1, \dots, k-1\}$, a každú usporiadanú i-ticu $(x_1, x_2, \dots, x_i) \in X^i$ existuje práve n_{i+1} prvkov $x_{i+1} \in X$, pre ktoré $A_{x_1,\dots,x_{i+1}} \neq \emptyset$.*

Potom $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Úloha 28. Koľko existuje trojciferných čísel v 4-kovej sústave, ktoré sa skladajú z rôznych cifier?

Úloha 29. Koľko existuje nepárnych 5-ciferných čísel (v 10-kovej sústave), ktoré sa skladajú z rôznych cifier?

Riešenia

Riešenia úloh sú celkom provizórne. Je možné, že obsahujú nejaké chyby, preklepy. Budem rád, pokiaľ mi každú nezrovnalosť nahlásite mailom na rajnik zavinac dcs.fmph.uniba.sk.

1. 50^{10}

2. m^n

3. 4^n

4. $2 \cdot 4(n-1)$

5. $4^{n-3} \cdot 4 = 4^{n-2}$

6. $n \cdot 3^{n-1}$

7. $9 \cdot 10^{n-1}$

8. $9 \cdot 10^{n-2} \cdot 5$ pre $n \geq 2$, pre $n = 1$ je to 5

9. $9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ $(n \geq 3)$

10. $9 \cdot 10^{n-2} \cdot 2$ $(n \geq 2)$

11. 100^{20}

12. $100^{\underline{20}}$

13. $50 \cdot 100^{19}$

14. $50 \cdot 100^{19}$

15. $50 \cdot 99^{\underline{19}}$

16. $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 = 49^{\underline{7}}$

17. $n^{\underline{7}}$

18. 16

19. 8

20. $n!$

21. $50 \cdot 99!$

22. 2^{100}

23. $4^n - 4^{n-2}$

24. $4^n - n \cdot 3^{n-1}$

25. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ (pre $n \geq 3$)

26. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-2} \cdot 2$ (pre $n \geq 2$)

27. $9 \cdot 10^{n-1} - 6 \cdot 7^{n-1}$

28. $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

29. $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$