Úlohy k cvičeniu č. 4

Definícia 1 (Kombinácie bez opakovania)**.** Nech B je konečná množina taká, že $|B| = n$ a nech $k \in \mathbb{N}$. *Kombináciou bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľnú k-prvkovú podmnožinu množiny B.

Množina všetkých k-prvkových podmnožín konečnej množiny B – čiže množina všetkých kombinácií k-tej triedy z B – sa zvykne označovať ako $\mathscr{P}_k(B)$ alebo ako $\binom{B}{k}$.

Veta 1. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet kombinácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B je*

$$|\mathscr{P}_k(B)| = \left|\binom{B}{k}\right| = \binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Ak navyše $k \leq n$, tak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Úloha 1. V hre Mates sa ťahá 5 čísel z 35. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých čísel?

Úloha 2. V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Z nich je šesť čísel riadnych a jedno dodatkové. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých riadnych čísel, ale záleží na rozdiele medzi riadnym a dodatkovým číslom?

Úloha 3. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú rovnaký počet oboch písmen?

Úloha 4. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a?

Úloha 5. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a?

Úloha 6. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 6 alebo 7 výskytov písmena a?

Úloha 7. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku párny počet bielych políčok?

Úloha 8. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $2n \times 2n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku bolo rovnako veľa bielych a čiernych políčok?

Úloha 9. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku aj stĺpci párny počet bielych políčok?

V nasledujúcich úlohách rozumieme pod *kartou* usporiadanú dvojicu

$$(c, n) \in \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\},$$

kde c nazývame *farbou karty* a n nazývame *číslom karty*. Množina čísel je lineárne usporiadaná usporiadaním $2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < J < Q < K < A$. Pod *pokrovou kombináciou* rozumieme ľubovoľnú množinu piatich (rôznych) kariet.

Úloha 10. Koľko je všetkých pokrových kombinácií?

Úloha 11. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet rovnakej farby (*straight flush*)?

Úloha 12. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich štyri karty s rovnakým číslom?

Úloha 13. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$ (*full house*)?

Úloha 14. Koľko je všetkých pokrových kombinácií iných ako *full house*?

Úloha 15. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, v ktorých majú všetky karty rovnakú farbu (*flush*)?

Úloha 16. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet ľubovoľnej farby (*straight*)?

Úloha 17. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x, dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z, pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (*dva páry*)?

Riešenia

1. $\binom{35}{5}$

2. $\binom{49}{7} \cdot 7$

3. $\binom{20}{10}$

4. $\binom{20}{7}$

5. $\binom{20}{7} \cdot 2^{13}$

6. $\binom{20}{6} \cdot 2^{14} + \binom{20}{7} \cdot 2^{13}$

7. $2^{n(n-1)}$

8. $\binom{2n}{n}^{2n}$

9. $2^{(n-1)^2}$

10. $\binom{52}{5}$

11. $9 \cdot 4 = 36$

12. $13 \cdot 48 = 624$

13. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744$

14. $\binom{52}{5} - 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 2595216$

15. $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$

16. $9 \cdot 4^5 = 9216$

17. $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 123552$