Úlohy k cvičeniu č. 8

Nasledujúce úlohy sú zamerané na konfigurácie rôznych typov.

Úloha 1. Na šachovnici stojí všetkých 32 štandardných figúrok. Koľko možných rozostavení možno získať po prehodení práve jednej dvojice figúrok?

Úloha 2. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok (bez obmedzení daných šachovými pravidlami).

Úloha 3. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby všetky biele figúrky boli v riadkoch 1 až 4 a všetky čierne figúrky boli v riadkoch 5 až 8?

Úloha 4. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby v každom stĺpci bol práve jeden biely pešiak?

Úloha 5. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dve čierne veže a bieleho kráľa tak, aby žiadna z veží kráľa neohrozovala? (Veža v našej terminológii ohrozuje kráľa aj v prípade, keď ju kráľ môže v ďalšom kroku vyhodiť.)

Úloha 6. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu bieleho a čierneho koňa tak, aby sa navzájom neohrozovali?

Úloha 7. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dvoch nerozlíšiteľných koňov tak, aby sa navzájom neohrozovali?

Úloha 8. Koľkými spôsobmi možno vybrať zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú jej časť (nezáleží nám na poradí)?

Úloha 9. Máme 32 kariet: 16 bielych a 16 čiernych, z každej farby čísla od 1 po 16. Koľkými spôsobmi možno z nich vybrať podmnožinu tak, aby v nej bol rovnaký počet bielych a čiernych kariet?

Úloha 10. Koľkými spôsobmi možno vybrať zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú jej podmnožinu tak, aby obsahovala aspoň jedného strelca a najviac troch koňov?

Úloha 11. V obchode majú 13 druhov keksíkov. Chceme si kúpiť 24 keksíkov tak, aby sme z každého druhu kúpili aspoň jeden. Koľkými spôsobmi to vieme spraviť?

Úloha 12. Na poličke je za sebou uložených 12 kníh. Koľkými spôsobmi možno vybrať spomedzi nich 5 tak, aby sme nevybrali žiadne dve vedľa seba?

Úloha 13. Nech $k, d \in \mathbb{N}^+$ a nech A je množina majúca kd prvkov. Určte počet rozkladov množiny A na d-prvkové podmnožiny.

Úloha 14. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dve čierne veže a bieleho kráľa tak, aby žiadna z veží kráľa ohrozovala? (Veža v našej terminológii ohrozuje kráľa aj v prípade, keď ju kráľ môže v ďalšom kroku vyhodiť.)

Úloha 15. Koľkými spôsobmi možno vybrať zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú jej podmnožinu tak, aby bol počet vybraných bielych a čiernych figúrok rovnaký?

Výsledky

1. $2(\binom{16}{2} - \binom{8}{2} - 3)$

2. $\dfrac{64!}{32! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 2^6}$

3. $\left(\dfrac{32!}{16! \cdot 8! \cdot 2^3}\right)^2$

4. $8^8 \cdot \dfrac{56!}{8! \cdot 2^6}$

5. $64\binom{49}{2} = 49\,728$

6. $64 \cdot 63 - (2 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8) = 3\,712$

7. $3\,712/2 = 1\,856$

8. $(9 \cdot 3^3 \cdot 2^2)^2$

9. $\sum_{k=0}^{8} \binom{16}{k}\binom{16}{k} = \binom{32}{16}$

10. $2^{24}(2^4 - 1)(2^4 - 1) = 2^{24} \cdot 15^2 = 3\,774\,873\,600$

11. $\binom{23}{11} = 1\,352\,078$

12. $\binom{8}{5} = 56$

13. $\dfrac{(kd)!}{k!(d!)^k}$

14. $64(\binom{63}{2} - \binom{49}{2}) = 64(14 \cdot 49 + \binom{14}{2}) = 49\,728$

15. $\sum_{k=0}^{8} \binom{16}{k}\binom{16}{k} = \binom{32}{16}$