Úlohy k cvičeniu č. 10

Základné pojmy

Úloha 1. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$.

Úloha 2. Nech $n, k \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$, ktoré majú práve k hrán.

Úloha 3. Nech $n, s \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých grafov na $V = \{1, \ldots, n\}$ takých, že medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi môže viesť najviac s paralelných hrán.

Úloha 4. Dokážte, že v každom jednoduchom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú aspoň dva vrcholy s rovnakým stupňom.

> **Definícia 1.** Nech $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Graf G je *k-regulárny*, ak pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) = k$. Graf G je regulárny, ak je k-regulárny pre nejaké k.

Úloha 5. Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k-regulárny jednoduchý graf rádu n.

Úloha 6. Nájdite všetky navzájom neizomorfné 3-regulárne grafy rádu 6.

Cestovanie po grafe – sledy, ťahy, cesty a kružnice

Úloha 7. Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?

Úloha 8. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

b) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

c) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj ťah začínajúci v u a končiaci vo v.

d) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

e) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

Úloha 9. Dokážte, že ak graf $G = (V, E)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

Úloha 10. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.

Úloha 11. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.

Úloha 12. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n-1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.

Úloha 13. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre každú dvojicu susedných vrcholov u, v platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$. Dokážte, že G musí byť nutne súvislý.

Úloha 14. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.

Úloha 15. Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý.

Úloha 16. Dokážte, že

a) pre každý jednoduchý graf o n vrcholoch, e hraných a k komponentoch platí $n - k \leq e \leq (n-k+1)(n-k)/2$ a

b) pre všetky l také, že $n - k \leq l \leq (n-k+1)(n-k)/2$ existuje graf o n komponentoch, l hranách a k komponentoch.

Stromy

Definícia 2. Graf $G = (V, E)$ je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

Veta 1. *Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) *G je strom.*

(ii) *Ľubovoľné dva vrcholy grafu G sú spojené práve jednou cestou.*

(iii) *Graf G je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu G nesúvislý graf. (G je minimálne súvislý)*

(iv) *Graf G je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica. (G je maximálne acyklický)*

(v) *G je súvislý graf rádu $n \in \mathbb{N}$ s $n - 1$ hranami.*

Definícia 3. Nech $T = (V, E)$ je strom. *List* je ľubovoľný vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 1$.

Úloha 17. Dokážte vetu 1.

Úloha 18. Nájdite všetky stromy $T = (V, E, I)$ obsahujúce vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 0$.

Úloha 19. Koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom na n vrcholoch?

Úloha 20. Dokážte, že každý strom T má aspoň $\Delta(T)$ listov.

Úloha 21. O strome T vieme, že má

- 4 vrcholy stupňa 2,
- 2 vrcholy stupňa 3,
- 7 vrcholov stupňa 4,
- maximálny stupeň 4.

Koľko môže mať strom T listov?

Úloha 22. Nájdite všetky regulárne stromy.

Úloha 23. Dokážte, že vrcholy stromu možno očíslovať v_1, v_2, $\ldots$, v_n tak, že pre každé $i \geq 2$ má vrchol v_i práve jedného suseda v množine $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$.

Bipartitiné grafy

Úloha 24. Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

Úloha 25. Dokážte, že každý regulárny bipartitný graf musí mať párny počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

Úloha 26. Nech G je súvislý kubický bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

Riešenia

1. $2^{n(n-1)/2}$

2. $\binom{n(n-1)/2}{k}$

3. $2^{sn(n-1)/2}$

4. Graf rádu n nemôže mať vrchol stupňa 0 a aj $n-1$.

5. Musí platiť $n > k$ a ak n je nepárne, tak k musí byť párne.

6. $K_{3,3}$ a K_4, kde sme jeden vrchol nahradili trojuholníkom.

7. Spojnica najdlhších ciest ich rozdelí každú na dva úseky. Zoberte dlhšie z nich. Hranu nemusia mať spoločnú.

8. a) Nie – u, v môže byť ten istý vrchol
b) Nie – u, v môže byť ten istý vrchol
c) Áno – zoberte si najkratší u-v-sled, ktorý nie je ťahom a nájdite kratší. d) Nie – Napr. ťah u, x, u.
e) Nie – Napr. sled u, x, u.

9. Nájdite v ňom kružnicu. Ak má párnu dĺžku, tak využite vo zvyšku sledu indukčný predpoklad.

10. Ak by ležal na viacerých, tak vrchol, v ktorom sa kružnice rozpoja, má veľký stupeň.

11. Grafy, v ktorých každý komponent je buď C_3, alebo hviezda – graf, kde je jeden vrchol spojený s hranou s ďalšími i vrcholmi (a žiadne iné hrany neobsahuje), $i \geq 0$

12. Každé dva nesusedné vrcholy majú spoločného susesda.

13. Podobne ako predchádzajúca úloha.

14. $(n-1)(n-2)/2$: ak má jeden komponent veľkosť a, tak graf môže mať najviac $a(a-1)/2 + (n-a)(n-a-1)/2 = 2a^2 - 2an + n(n-1)/2$ hrán, čo nadobúda maximum pre $a = 1$ a $a = n-1$. Dosiahne sa na grafe $K_{n+1}+$ izolovaný vrchol.

15.

16.

17.

18. 1-vrhcolový graf

19. Najmenej 2: cesta. Najviac $n-1$: hviezda.

20. Zoberte si vrchol najväčšieho stupňa a nájdite listy v podstromoch, ktoré sú naň zavesené

21. 18

22. 1-vrcholový graf

23.

24.

25. Spočítame počet hrán a vyjde, že jeho partície musia byť rovnako veľké.

26.