Úlohy k cvičeniu č. 11

Súvislosť

> **Definícia 1.** Nech $G = (V, E)$ je graf. *Hranový graf* grafu G je graf $L(G) = (V', E')$, kde $V' = E$ a $E' = \{\{e, f\} \in \binom{E}{2} \mid e \cap f \neq \emptyset\}$. Teda $L(G)$ má za vrcholu hrany grafu G a medzi dvomi hranami grafu G je v grafe $L(G)$ hrana práve vtedy, keď majú spoločný vrchol.

Úloha 1. Nájdite príklady grafov, pre ktoré platí:

1. $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$,
2. $\kappa(G) < \lambda(G) = \delta(G)$,
3. $\kappa(G) = \lambda(G) < \delta(G)$.

Úloha 2. Dokážte, že 3-regulárny bipartitný graf je hranovo 2-súvislý. Aj aj vrcholovo 2-súvislý?

Úloha 3. Dokážte, že hranový graf súvislého grafu je súvislý.

Úloha 4. Dokážte, že ak graf G je vrcholovo k-súvislý, tak potom aj hranový graf $L(G)$ je vrcholovo k-súvislý.

Úloha 5. Nech G je k-súvislý graf a nech H je graf, ktorý vznikne z G pridaním nového vrcholu v a k hrán medzi ním a vrcholmi G. Dokážte, že H je k-súvislý.

Úloha 6. Graf má k navzájom hranovo disjunktných kostier práve vtedy, keď je hranovo k-súvislý.

1. Platí tvrdenie pre všetky $k \geq 1$?
2. Ak nie, platí niektorá implikácia?
3. Pre ktoré k platí?
4. Ako sa zmení jeho platnosť, ak hranovú súvislosť nahradíme za vrcholovú?

Úloha 7. Určte, ktoré z nasledovných tvrdení sú ekvivalentné. Pre tie, ktoré nie sú ekvivalentné, rozhodnite, či medzi nimi platí implikácia niektorým smerom. Všetky implikácie a ekvivalencie berieme pre všetky grafy G s aspoň tromi vrcholmi.

(1) G je vrcholovo 2-súvislý.

(2) G je hranovo 2-súvislý.

(3) Každý vrchol grafu G leží na kružnici.

(4) Každá hrana grafu G leží na kružnici.

(5) Každé dva vrcholy grafu G ležia na spoločnej kružnici.

(6) Ľubovoľný vrchol a ľubovoľná hrana grafu G ležia na spoločnej kružnici.

(7) Každé dve hrany grafu G ležia na spoločnej kružnici $\Leftrightarrow$.

Je tam skrytých zopár chytákov, kedy treba ošetriť platnosť implikácie ešte nejakou drobnou podmienkou. Niektoré možno aj neúmyselne. $[(1) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (6) \Leftrightarrow (7*)] \Rightarrow (2) \Rightarrow (4^*) \Rightarrow (3)$, kde podmienky s hviezdičkou vzniknú pridaním dodatočnej podmienky, že $\delta(G) \geq 1$. Bez tohto totiž $(4) \not\Rightarrow (3)$ a $(7) \not\Rightarrow (1)$.

Planárne grafy

Definícia 2. Súvislý graf $G = (V, E)$ je *planárny*, ak sa dá nakresliť do roviny bez kríženia hrán.

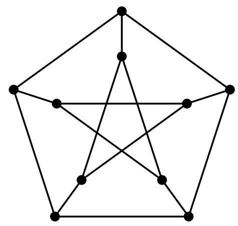
Definícia 3. Nech súvislý graf $G = (V, E)$ je nakreslený do roviny (*rovinný graf*). Oblasť rovinného grafu G je plocha ohraničená hranami grafu G. *Veľkosť oblasti* je dĺžka najkratšieho uzavretého sledu obsahujúceho hrany ohraničujúce oblasť.

Veta 1 (Eulerova formula). *Nech $G = (V, E)$ je súvislý rovinný graf a nech F je množina jeho oblastí. Potom platí*

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Úloha 8. Nájdite planárny graf, ktorý má dve rôzne nakreslenia. To znamená, že sa dá nakresliť dvomi rôznymi spôsomi tak, že veľkosti oblastí jedného nakreslenia sú iné ako veľkosti oblastí druhého nakreslenia.

Úloha 9. Dokážte, že Petersnov graf nie je planárny.



Úloha 10. Dokážte, že kompletný bipartitný graf $K_{2,n}$ je planárny pre všetky n. Aký môže mať počet oblastí?

Úloha 11. Dokážte, že každý planárny graf má vrchol stupňa najviac 5.

Úloha 12. Nájdite všetky platónske telesá. Sú to súvislé rovinné grafy, pre ktoré platí, že všetky ich oblasti majú rovnakú veľkosť a všetky vrcholy majú rovnaký stupeň.

Výsledky a návody

1. Napr: 1. Úplný graf, 2. dve kružnice so spoločným vrcholom, 3. dve kružnice spojené mostom.

2. V oboch prípadoch áno. Zoberieme si komponent, v ktorom chýba a spočítame počet hrán dvomi spôsobmi podľa počtu vrcholov v jednej partícii.

3. Sled medzi $e,\ f \in V(L(G)) = E(G)$ v $L(G)$ nájdeme pomocou sledu medzi koncovými vrcholmi hrán $e,\ f$ v G.

4. Platí $L(G) - \{e_1, \ldots, e_{k-1}\} = L(G - \{e_1, \ldots, e_{k-1}\})$ a graf $G - \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ je súvislý.

5. Odstráňte z H k vrcholov. Rozlíšte, či ste odstránili v.

6. 1. Neplatí – napr. cykly sú 2-súvislé a nemajú dve h. disj. kostry.
2. Implikácia $\Rightarrow$ platí. Pri odstránení $< k$ hrán ostane jedna kostra neporušená.
3.
4. Platí len pre $k = 1$. Disjunktnosť kostier nevylučuje prítomnosť artikulácie.

7.

8. Obsahuje subdivíziu K_5 alebo aj $K_{3,3}$.

9. n vrcholov dajte do stredu medzi dva vrcholy. Má vždy n oblastí.

10. Sporom. Mal by priveľa hrán.

11. `https://sk.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3nske_teleso` + podľa tejto definície aj kružnice.