Úlohy k cvičeniu č. 12

Farbenia

Úloha 1. Určte chromatické číslo a chromatikcý index grafov K_n, $K_{a,b}$, C_n.

Úloha 2. Nech $G = (V, E)$ je graf s $V = \{1, 2, \ldots, 2020\}$ a $E = \{\{a, b\};\ |a-b| \text{ je prvočíslo}\}$. Určte $\chi(G)$ a $\chi'(G)$.

Úloha 3. Vyriešte predchádzajúcu úlohu všeobecne, teda nahraďte 2020 n-kom a výsledok uveďte ako funkciu n.

Úloha 4. (*) Dokážte, že každý planárny 3-regulárny graf má chromatický index 3.

Vzdialenosť, priemer, polomer

Definícia 1. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a $u, v \in V$ sú jeho vrcholy. Pod *vzdialenosťou* vrcholov u a v v grafe G rozumieme dĺžku najkratšieho u-v-sledu. Vzdialenosť vrcholov u a v označujeme symbolom $\mathrm{dist}_G(u, v)$.

Definícia 2. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Priemer* grafu G je číslo

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{\mathrm{dist}_G(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Definícia 3. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a $v \in V$ je jeho vrchol. *Excentricita* vrcholu v je číslo

$$\mathrm{ex}_G(v) = \max\{\mathrm{dist}_G(u, v) \mid u \in V\}.$$

Definícia 4. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Polomer* grafu G je číslo

$$\mathrm{rad}(G) = \min\{\mathrm{ex}_G(v) \mid v \in V\}.$$

Definícia 5. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf. *Centrum* grafu G je množina vrcholov

$$\mathrm{cent}(G) = \{v \in V \mid \mathrm{ex}_G(v) = \mathrm{rad}(G)\}.$$

Úloha 5. Dokážte, že pre vzdialenosť v grafe G platí:

1. $\forall v \in V(G)\colon \mathrm{dist}_G(v, v) = 0$;
2. $\forall u, v \in V(G)\colon \mathrm{dist}_G(u, v) = \mathrm{dist}_G(v, u)$;
3. $\forall u, v, w \in V(G)\colon \mathrm{dist}_G(u, v) \leq \mathrm{dist}_G(u, w) + \mathrm{dist}_G(w, v)$ (trojuholníková nerovnosť).

(Tieto vlastnosti hovoria, že funkcia vzdialenosť vytvára na množine vrcholov grafu metriku, teda ide o rozumnú funkciu na meranie vzdialenosti.)

Úloha 6. Nech $G = (V, E, I)$ je ľubovoľný súvislý graf. Dokážte, že $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\mathrm{rad}(G)$.

Stromy a kostry

Definícia 6. Graf $G = (V, E)$ je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

Veta 1. *Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(*i*) *G je strom.*

(*ii*) *Ľubovoľné dva vrcholy grafu G sú spojené práve jednou cestou.*

(*iii*) *Graf G je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu G nesúvislý graf. (G je minimálne súvislý)*

(*iv*) *Graf G je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica. (G je maximálne acyklický)*

(*v*) *G je súvislý graf rádu* $n \in \mathbb{N}$ *s* $n-1$ *hranami.*

Definícia 7. Nech $T = (V, E)$ je strom. *List* je ľubovoľný vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 1$.

Úloha 7. Dokážte vetu 1.

Úloha 8. Nájdite všetky stromy $T = (V, E, I)$ obsahujúce vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 0$.

Úloha 9. Koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom na n vrcholoch?

Úloha 10. Dokážte, že každý strom T má aspoň $\Delta(T)$ listov.

Úloha 11. O strome T vieme, že má

- 4 vrcholy stupňa 2,
- 2 vrcholy stupňa 3,
- 7 vrcholov stupňa 4,
- maximálny stupeň 4.

Koľko môže mať strom T listov?

Úloha 12. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$. Nech v je list stromu T a u je susedný vrchol listu v. Dokážte, že $\mathrm{ex}_T(u) = \mathrm{ex}_T(v) - 1$.

Úloha 13. Nech $T = (V, E, I)$ je strom rádu $n \geq 3$ a nech $v \in \mathrm{cent}(T)$. Dokážte, že $\deg_T(v) \geq 2$.

Úloha 14. Nájdite všetky regulárne stromy.

Úloha 15. Dokážte, že vrcholy stromu možno očíslovať $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že pre každé $i \geq 2$ má vrchol v_i práve jedného suseda v množine $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$.

Definícia 8. Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. *Kostra grafu G* je ľubovoľný strom T, ktorý je faktorom grafu G.

Úloha 16. Nech $G = (V, E, I)$ je súvislý graf a T je jeho kostra. Dokážte, že $\mathrm{diam}(T) \geq \mathrm{diam}(G)$.

Úloha 17. Dokážte alebo vyvráťte: každý súvislý graf $G = (V, E, I)$ má aspoň jednu kostru T takú, že $\mathrm{diam}(T) = \mathrm{diam}(G)$.

Eulerovské a hamiltonovkské grafy

Definícia 9. Súvislý graf $G = (V, E)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany (*eulerovský ťah*).

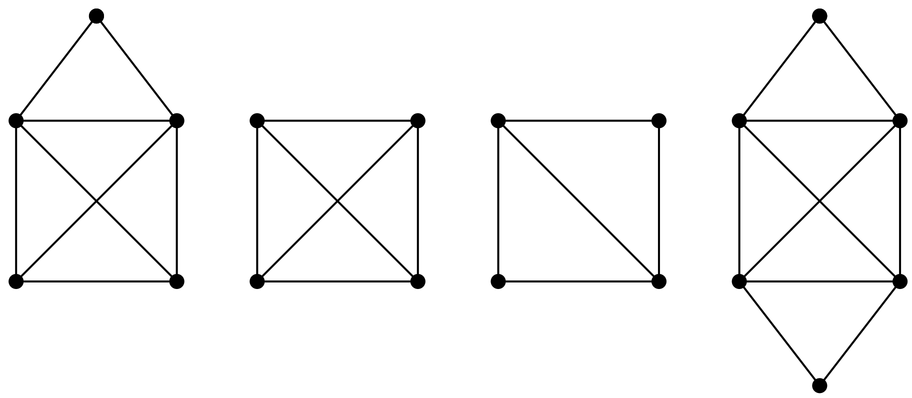
Veta 2. *Nech* $G = (V, E)$ *je súvislý graf. Graf G je eulerovský práve vtedy, keď sú stupne všetkých jeho vrcholov párne.*

Veta 3. *Nech* $G = (V, E)$ *je súvislý graf. V grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany práve vtedy, keď v grafe G existujú práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

Definícia 10. Súvislý graf je *hamiltonoský*, ak v ňom existuje kružnica prechádzajúca cez všetky vrcholy.

Definícia 11. *Hranový graf* $L(G)$ grafu G je graf, ktorého vrcholmi sú hrany grafu G a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď hrany, ktoré sú reprezentované vrcholmi $L(G)$, majú spoločný vrchol.

Úloha 18. Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



Úloha 19. Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

Úloha 20. Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf K_n je eulerovský.

Úloha 21. Dokážte, alebo vyvráťte masledujúce implikácie:

1. Graf G je eulerovský $\Rightarrow$ hranový graf $L(G)$ je eulerovský.
2. Hranový graf $L(G)$ je eulerovský $\Rightarrow$ graf G je eulerovský.

Úloha 22. Dokážte, že bipartitiný hamiltonovský graf má obe partície rovnakej veľkosti.

Úloha 23. Dokážte, že ak G je hamiltonovský alebo eulerovský, tak hranový graf $L(G)$ je hamiltonovský.