# Úlohy k cvičeniu č. 9

**Definícia 1.** Nech $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sú funkcie. Potom píšeme:

(*i*) $f(n) = O(g(n))$, ak existuje $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.

(*ii*) $f(n) = \Omega(g(n))$, ak $g(n) = O(f(n))$.

(*iii*) $f(n) = \Theta(g(n))$ alebo $f(n) \asymp g(n)$, ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $g(n) = O(f(n))$.

(*iv*) $f(n) = o(g(n))$, ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

(*v*) $f(n) = \omega(g(n))$, ak $g(n) = o(f(n))$.

(*vi*) $f(n) \sim g(n)$, ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Uvedenú definíciu možno rozšíriť aj na funkcie $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – v takom prípade je možné študovať asymptotické vlastnosti funkcií nielen pre $x \to \infty$, ale aj pre $x \to a$, kde $a$ je ľubovoľný prvok rozšírenej reálnej osi.

Aj keď je horeuvedená definícia sformulovaná pre ľubovoľné $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, zvyčajne budeme pracovať s funkciami, ktoré sú nezáporné pre všetky alebo takmer všetky $n$. (Hovoríme, že nejaké tvrdenie platí *pre takmer všetky* $n \in \mathbb{N}$, ak platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ až na konečný počet výnimiek. Inak povedané, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že vlastnosť platí pre všetky $n \geq n_0$.) V takom prípade možno bod (*i*) preformulovať aj bez použitia absolútnych hodnôt.

**Úloha 1.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = O(n^3)$.

b) $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = \Theta(n^3)$.

c) $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = o(n^3)$.

d) $n^3 + 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 \sim n^3$.

**Úloha 2.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n^2 = O(n^3)$.

b) $n^2 = \Theta(n^3)$.

c) $n^2 = o(n^3)$.

d) $n^2 \sim n^3$.

**Úloha 3.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2\log n = O(\log n)$.

b) $2\log n = \Theta(\log n)$.

c) $2\log n = o(\log n)$.

d) $2\log n \sim \log n$.

**Úloha 4.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2\log n = O(n)$.

b) $2\log n = \Theta(n)$.

c) $2\log n = o(n)$.

d) $2\log n \sim n$.

**Úloha 5.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^{n+1} = \Theta(2^n)$.

b) $2^{2n} = \Theta(2^n)$.

**Úloha 6.** Nech $x, y \in \mathbb{R}$. Ak $n^x = \Theta(n^y)$, tak $x = y$. Dokážte.

**Úloha 7.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $\log n = O(\sqrt{n})$.

b) $\log n = \Theta(\sqrt{n})$.

c) $\log n = o(\sqrt{n})$.

d) $\log n \sim \sqrt{n}$.

**Úloha 8.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^n + (-1)^n 2^n = O(2^n)$.

b) $2^n + (-1)^n 2^n = \Theta(2^n)$.

**Úloha 9.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n! = O(2^n)$.

b) $2^n = O(n!)$.

**Úloha 10.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n! = O(n^n)$.

b) $n^n = O(n!)$.

**Úloha 11.** Dokážte alebo vyvráťte: $F_n = \Theta([(1+\sqrt{5})/2]^n)$.

**Úloha 12.** Zistite, či existuje konštanta $a \in \mathbb{R}$ taká, že $\log n = \Theta(n^a)$.

**Úloha 13.** Nech $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sú funkcie. Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak $f(n) = O(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.

b) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) = O(g(n))$.

c) Ak $f(n) = \Theta(g(n))$, tak $f(n) \sim g(n)$.

d) Ak $f(n) \sim g(n)$, tak $f(n) = \Theta(g(n))$.

e) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) \neq \Omega(g(n))$.

f) Ak $f(n) \neq \Omega(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.

**Úloha 14.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) Pre ľubovoľné $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ platí buď $f(n) = O(g(n))$, alebo $g(n) = O(f(n))$.

b) Pre ľubovoľné rastúce $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ platí buď $f(n) = O(g(n))$, alebo $g(n) = O(f(n))$.

**Úloha 15.** Nech $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sú funkcie. Dokážte, že $f(n) = o(g(n))$ práve vtedy, keď pre všetky $c > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.

**Úloha 16.** Nech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že $f(n) = O(2^n)$. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^n + |f(n)| = O(2^n)$.

b) $|2^n - |f(n)|| = O(2^n)$.

**Úloha 17.** Nech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že $f(n) = \Theta(2^n)$. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^n + |f(n)| = \Theta(2^n)$.

b) $|2^n - |f(n)|| = \Theta(2^n)$.

**Úloha 18.** Dokážte, že platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Theta(n^4).$$

**Úloha 19.** Dokážte, že platí

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n).$$

Ako dokazovať asymptotické odhady súm?

1. Upraviť sumu na uzavretý tvar (bez sumy) a spraviť odhad preň.
2. Odhadnúť každý člen samostatne, ideálne nezávisle na sumačnej konštante (napr. $\sum_{k=1}^{n} k^3 \le \sum_{k=1}^{n} n^3$). Pri dolnom odhade sa často oplatí zdola odhadnúť polovicu členov sumy ($\sum_{k=1}^{n} k^3 \ge \sum_{k=n/2}^{n} (n/2)^3$).
3. Spraviť dolný a horný odhad pomocou integrálu.

Symbol $O(g(n))$ je výhodné interpretovať ako *množinu* všetkých funkcií $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takých, že $f(n) = O(g(n))$. Formálne korektnejšie by teda bolo namiesto $f(n) = O(g(n))$ písať $f(n) \in O(g(n))$; tento spôsob zápisu ale veľmi rozšírený nie je. Podobne interpretujeme aj symboly $\Omega(g(n)), \Theta(g(n)), o(g(n))$ a $\omega(g(n))$.

Nech teraz $A$ je ľubovoľná množina a $\circ$ je ľubovoľná binárna operácia na prvkoch množiny $A$. Pre $a \in A$ a $B \subseteq A$ potom pod zápisom $a \circ B$ chápeme množinu

$$a \circ B = \{a \circ b \mid b \in B\}.$$

Podobne, pre $B, C \subseteq A$ chápeme pod zápisom $B \circ C$ množinu

$$B \circ C = \{b \circ c \mid c \in C\}.$$

V tomto duchu treba chápať aj zápisy ako $f(n) + O(g(n))$ alebo $O(f(n)) + O(g(n))$.