1. Nech m, n sú celé nezáporné čísla. Nájdite počet ciest dĺžky $m+n$ vedúcich z počiatku súradnicovej sústavy do bodu (m,n), pozostávajúcich z úsečiek rovnobežných so súradnicovými osami, ktoré majú koncové body v bodoch s celočíselnými súradnicami.

2. Koľkými spôsobmi môžeme do obdĺžnikovej matice $m \times n$ zapísať čísla $+1$ a -1 tak, aby súčin čísel v každom riadku i v každom stĺpci bol rovný $+1$?

3. V triede je 35 žiakov. 20 z nich navštevuje matematický krúžok, 11 fyzikálny, 10 žiakov nenavštevuje žiadny z týchto krúžkov. Koľko žiakov navštevuje aj matematický aj fyzikálny krúžok? Koľko žiakov navštevuje iba matematický krúžok?

4. Dokážte rovnosť $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$.

5. Dokážte rovnosť $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$.

5'. Dokážte rovnosť'
$$\sum_{\substack{0 \le m_1 \le n_1, \dots, 0 \le m_q \le n_q \\ m_1 + \cdots + m_q = m}} \binom{n_1}{m_1} \cdot \binom{n_2}{m_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n_q}{m_q} = \binom{n_1 + \cdots + n_q}{m}.$$

6. Koľkými spôsobmi môžeme rozostaviť n veží na šachovnici $n \times n$ tak, aby sa
   a) žiadne dve neohrozovali
   b) to isté, ak sú veže rôzne (t.j. sú očíslované $1, \dots, n$)
   c) ako to je pre n veží na šachovnici $n \times m$?

7. Koľkými spôsobmi môžeme z troch kariet dostať oko (t.j. súčet 21)?

8. Koľkými spôsobmi možno rozdať 27 kníh osobám A, B, C tak, aby A a B dohromady obdržali dvakrát viac než C?

9. Koľkými spôsobmi môžeme usadiť za okrúhly stôl n mužov a n žien tak, aby pri sebe nesedeli dvaja ľudia rovnakého pohlavia?

10. Koľkými spôsobmi môžeme uložiť $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ rôznych guličiek do k rôznych škatúľ tak, aby v prvej škatuli bolo n_1, v druhej n_2, atď., v k-tej n_k guličiek?

11. Koľkými spôsobmi môžeme uložiť n rovnakých guličiek do m rôznych škatúľ tak, aby v prvých s škatuliach bolo $a_1, a_2, \dots, a_s$ guličiek (t.j. v i-tej škatuli a_i guličiek), pričom $a_1 + a_2 + \cdots + a_s \le n$?

12. Koľkými spôsobmi môžeme uložiť n rovnakých guličiek do m rôznych škatúľ tak, aby v i-tej škatuli bolo aspoň a_i guličiek (pre $i = 1, 2, \dots, m$)?

13. **Dokážte, že počet usporiadaných rozkladov čísla n na k prirodzených sčítancov, t.j. počet riešení rovnice $n = x_1 + \cdots + x_k, x_i > 0$ pre $i = 1, \dots, k$ je $\binom{n-1}{k-1}$.**

14. **Vytvorme z čísel od 1 po n všetky možné súčiny obsahujúce k rôznych činiteľov (k je pevné). Koľko z nich je deliteľných prvočíslom $p \le n$?**

15. Dokážte rovnosť $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, n \ge 0$.

16. Manžel má 12 známych, z toho 5 žien a 7 mužov. Manželka 7 žien a 5 mužov. Koľkými spôsobmi možno zostaviť skupinu 6 mužov, 6 žien tak, aby 6 osôb poznal manžel a 6 manželka?

17. 8 ľudí tancuje v kruhu. Koľkými spôsobmi môžu byť rozostavení?

18. Na poličke je 12 kníh. Koľkými spôsobmi z nich môžeme vybrať 5 tak, aby žiadne z nich nestáli vedľa seba?

19. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať z čísel od 1 po 30 tri čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný a) dvomi b) tromi?

20. Na skúške je 7 ľudí. Traja z nich sú Jano, Jožo a Ďuro. Koľko je možných poradí, v akom budú odpovedať, ak
   a) Jožo chce ísť bezprostredne za Ďurom,
   b) Jožo chce ísť najskôr ako piaty.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

21. Nájdite súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré sa dajú napísať pomocou číslic 1,2,3,4.

22. Koľko existuje trojuholníkov, ktorých vrcholy sú totožné s vrcholmi daného vypuklého n-uholníka a pritom žiadna strana nie je totožná so stranou tohto n-uholníka?

23. Koľko existuje trojuholníkov s celočíselnými stranami, ktorých obvod je a) 40, b) 43?

24. Uvažujme všetky celé čísla od 1 po 1000. Rozdeľme ich na 2 skupiny: Do prvej dajme čísla, v ktorých zápise sa vyskytuje aspoň jedna cifra 1, do druhej ostatné čísla. Ktorá skupina obsahuje viac čísel?

25. Dokážte, že súčet všetkých koeficientov polymického rozkladu

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0, \ldots r_k \geq 0 \\ r_1 + \cdots + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!} a_1^{r_1} \ldots a_k^{r_k}$$

sa rovná k^n.

26. Koľko racionálnych členov obsahuje rozklad $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

27. Dokážte rovnosť $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} = 0$.

28. Určte koeficient pri x^8 v rozvoji $(1 + x^2 - x^3)^9$.

29. Určte koeficient pri x^m v rozvoji $(1 + x)^k + (1 + x)^{k+1} + \cdots + (1 + x)^n$.

30. Dokážte, že pre všetky $n \geq 2$ a $|x| \leq 1$ platí $(1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2^n$.

31. Nájdite počet permutácii m-prvkovej množiny, v ktorých práve r prvkov $(0 \leq r \leq m)$ stojí na svojom mieste.

32. Dokážte rovnosť $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0$, kde $1 \leq n < m$.

33. Dokážte rovnosť $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = 0$, kde $1 \leq n < m$.

2
c

34. Dokážte rovnosť $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = (m!)$.

35. V triede je 45 žiakov, z toho 25 je chlapcov, 30 žiakov má dobrý prospech, z nich 16 je chlapcov. Športu sa venuje 28 žiakov, z toho 18 chlapcov a 17 žiakov, ktorí majú dobrý prospech. 15 chlapcov má dobrý prospech a súčasne športuje. Je táto správa správna?

36. **Koľko existuje prirodzených čísel menších alebo rovnajúcich sa 210, ktoré sú súdeliteľné s číslom 210?**

37. **Koľko existuje prirodzených čísel menších alebo rovnajúcich sa 100, ktoré nie sú deliteľné žiadnym z čísel 2,3,5?**

38. Dokážte rovnosť $\binom{n+m}{m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k}$, kde $m, n > 0$.

39. Dokážte rovnosť $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$.

40. Dokážte rovnosť $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (m-1)^{n-k} = m^n$ (návod: kombinatorickou úvahou).

41. Na koľko častí môžeme rozdeliť povrch gule n rovinami, prechádzajúcimi cez jej stred, za predpokladu, že žiadne tri roviny neprechádzajú cez ten istý priemer?

42. Dokážte, že $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \cdots + \binom{r-1}{r-1}$.

43. Dokážte, že $\binom{n}{k+1} > \binom{n}{k}$, ak $k < \frac{n-1}{2}$ a $\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$, ak $k > \frac{n-1}{2}$.

54. Ak A, B sú konečné množiny, $|A| = m$, $|B| = n$, tak $|B^A| = n^m$.

55. Nech A, B sú konečné množiny, $|A| = m$, $|B| = n$, a nech I_B^A je množina všetkých injekcií z A do B. Potom $|I_B^A| = \prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$.

56. Rovnosť $|I_B^A| = 0$ platí práve vtedy, ak $|A| > |B|$.

57. Počet lineárnych usporiadaní v n-prvkovej množine je $n!$.

58. Nech A je konečná množina, $|A| = n$. Pre každé $k \in \mathbb{N}$ položíme

$$\mathcal{P}_k(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) : |X| = k\}$$

potom

$$|\mathcal{P}_k(A)| = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)$$

59. Ak $|A| = n \in \mathbb{N}$, tak $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

60. Ak k,n,n_1,n_2 sú ľubovolné prirodzené čísla, tak platí

(a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pre $k \le n$

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pre $k \le n$

(c) $\binom{n}{k} = 0$ práve vtedy, ak $k > n$.

(d) $\sum_{j=0}^{k}\binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j} = \binom{n_1+n_2}{k}$

(e) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

(f) Pre každé reálne x platí rovnosť $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

(g) $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = 0$

(h) $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = 0$

61. Nech A je ľubovolná množina a nech $k \in \mathbb{N}^+$. Ak $\mathcal{R}$ je taká binárna relácia v množine všetkých variácií s opakovaním k-tej triedy z prvkov množiny A, že pre všetky (ľubovolné) funkcie f,g z $\{1,\dots,k\}$ do A je $f\mathcal{R}g$ práve vtedy, ak

$$|f^-(\{x\})| = |g^-(\{x\})|$$

pre každé $x \in A$, potom $\mathcal{R}$ je ekvivalencia. Rozklad určený ekvivalenciou $\mathcal{R}$ označujeme $D^{(k)}(A)$ a jeho prvky nazývame kombinácie s opakovaním k-tej triedy z prvkov množiny A.

62. Nech $k, n \in \mathbb{N}^+, |A| = n, A = \{a_1,\dots,a_n\}$. Potom sa $|D^{(k)}(A)|$ rovná počtu takých funkcií f z A do $\{0,1,\dots,k\}$, že

$$f(a_1) + \dots + f(a_n) = k$$

63. Ak $k, n \in \mathbb{N}^+, |A| = n, A = \{a_1,\dots,a_n\}$, tak $|D^{(k)}(A)| = \binom{n+k-1}{k}$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

64. Nech $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^+, n = n_1 + \cdots + n_k$ a nech $|A| = n, |B| = k, B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Ak $P_{n_1,\ldots,n_k}$ je počet takých surjekcií f z A do B, že $|f^-(\{b_j\})| = n_j$ pre $j = 1, \ldots, k$, tak

$$P_{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$$

65. Nech $k, d \in \mathbb{N}^+$ a nech množina A má kd prvkov. Ak $\rho_d(A)$ je počet rozkladov množiny A na d-prvkové podmnožiny, tak

$$\rho_d(A) = \frac{(kd)!}{k!(d!)^k}$$

66. Dokážte:

(1) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$;

(2) $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$;

(3) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{k} = (n+1)2^n$;

(4) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)}(2^{n+1}-1)$;

(5) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$;

(6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$;

(7) $\sum_{k}\binom{n}{2k} = \sum_{k}\binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$;

(8) $4\sum_{k}\binom{n}{4k} = 2^n + 2^{\frac{n}{2}+1} cos\frac{\pi n}{4}$;