Príklady rôznych typov.

1. Koľko je permutácií $n > 1$ prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$, v ktorých pre žiadne $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ nie je prvok a_{i+1} bezprostredne za prvkom a_i?

2. Koľko existuje k-prvkových variácií s opakovaním z n prvkov takých, že každá obsahuje všetkých n prvkov?

3. Máme $2k+1$ lístkov očíslovaných prirodzenými číslami $1, 2, \ldots, 2k+1$. Aký najväčší počet lístkov možno vybrať tak, aby sa žiadne vybraté číslo nerovnalo súčtu dvoch vybratých čísel?

4. Nech $A = (a_{ij})$ je matica typu $n \times n$, $a_{ij} = \{-1, 0, 1\}$. Koľko možno vytvoriť matíc tak, aby súčty prvkov v riadkoch, stĺpcoch, na diagonálach boli **navzájom** rôzne? (Teda napr. súčet v riadku musí byť rôzny od iných súčtov v riadku, od všetkých súčtov v stĺpcoch a na diagonálach.)

5. Ak je v miestnosti prítomných n osôb, potom aspoň dvaja z prítomných majú rovnaký počet známych spomedzi prítomných. Dokážte. (Vzťah „a je známy b“ pokladáme za vzájomný, t.j. ak a je známy b, potom b je známy a.)

6. Nech A_n je počet Spernerových systémov pre množiny z n prvkov. Dokážte, že

$$2^{T_n} < A_n < C_{2^{T_n}}^{T_n}, \quad T_n = C_n^{[\frac{n}{2}]}.$$

7. Je daných n dvojíc, z ktorých každá sa skladá z dvoch rovnakých písmen, pričom dve rôzne dvojice obsahujú vždy rôzne písmená. Všetkých $2n$ písmen usporiadavame tak, že žiadne dve rovnaké písmená nenasledujú za sebou. Koľko je takých usporiadaní?

8. Máme r rôznych vecí, ktoré rozdeľujeme medzi $n+p$ ľudí a to tak, aby každý z n **vopred daných** ľudí dostal aspoň jednu vec. Dokážte, že toto rozdelenie môžeme previesť S_r spôsobmi, kde

$$S_r = (n+p)^r - n(n+p-1)^r + \binom{n}{2}(n+p-2)^r - \cdots + (-1)^n p^r.$$

9. Dokážte, že platí

$$\frac{(n+r-1)!}{r!} - \frac{n}{1}\frac{(n+r-3)!}{(r-2)!} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{(n+r-5)!}{(r-4)!} - \cdots = \frac{n!(n-1)!}{r!(n-r)!}.$$

10. Skupina skladajúca sa zo 41 študentov úspešne zložila semestrálne skúšky z 3 predmetov. Možné známky boli 1,2,3. Dokážte, že aspoň päť študentov zložilo semestrálne skúšky s rovnakými známkami!

11. Komisia zasadala 40-krát. Každý raz sa na zasadnutí zúčastnilo 10 osôb, pričom žiadni dvaja členovia sa na zasadnutí nezúčastnili spolu viac ako jedenkrát. Dokážte, že počet členov komisie je viac ako 60.

12. V niektorej inštitúcii pracuje 25 pracovníkov. Dokážte, že z nich nie je možné vytvoriť viac ako 30 komisií po 5 osôb v každej tak, aby žiadne dve komisie nemali spoločného viac ako jedného člena.

13. Koľkými spôsobmi môžeme posadiť v kine n manželských dvojíc do posledného radu, kde je $2n$ miest tak, aby žiadny manželský pár nesedel veľa seba?

14. Koľko je všetkých permutácií $2n$ prvkov $m_1, m_2, \ldots, m_{2n}$, v ktorých pre žiadne nepárne $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ nie je prvok m_i na i-tom mieste.

15. Koľko je všetkých permutácií k prvkov $m_1, m_2, \ldots, m_k$, v ktorých pre žiadne $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ nie je prvok m_i na i-tom mieste, a pritom prvky m_1 a m_2 sú vedľa seba?

16. Úloha o háreme.
Nech $M = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ je systém konečných neprázdnych množín. Požadujeme, aby každá množina mala viacej ako jedného reprezentanta, naďalej však požadujeme, aby reprezentanti boli rôzni. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku riešenia tejto úlohy.

17. Zistite, či môžu hodiny: matematiky, fyziky, zemepisu a biológie bežať súbežne, ak máme k dispozícii: matematika, fyzika, M+Z, B+Z, B+Z. Výuku máme zabezpečiť 4 vyučujúcimi.

18. Ukážte, že ak každá množina má r prvkov $r \geq 1$ a každý prvok sa vyskytuje v r množinách, tak potom existuje systém rôznych reprezentantov pre množiny $\{S_1, \ldots, S_m\}$.

Spočítateľné množiny - pokračovanie.

11. Množina všetkých otvorených intervalov s racionálnymi koncami je spočítateľná. Dokážte!

12. Nájdite množinu $X \subseteq \mathbb{R}^n$ takú, že

a) X je spočítateľná

b) pre každé $\varepsilon > 0$ a pre každé $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ existuje $x \in X$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ také, že

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| < \varepsilon.$$

13. Ak X je množina navzájom disjunktných otvorených intervalov, tak X je spočítateľná. Dokážte!

14. Nech f je neklesajúca funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Dokážte, že platí:

a) pre každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$;

b) množina bodov nespojitosti funkcie f je nespočítateľná.

15. Nech f je funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Pripomeňme, že f má totálne minimum v čísle a, ak existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre každé $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon), x \neq a$ je $f(x) > f(a)$. Podobne totálne maximum. Dokážte, že množina všetkých bodov, v ktorých funkcia má totálne minimum alebo totálne maximum, je spočítateľná.

16. Nech $Tk(X)$ je množina všetkých postupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ prvkov množiny X takých, že existuje $m \in N$ také, že pre každé $n \geq m$ je $a_n = a_m$. Aká je mohutnosť množín $Tk(\{0\})$, $Tk(\{0,1\})$, $Tk(\mathbb{N})$, $Tk(\mathbb{Q})$, $Tk(\mathbb{R})$?

17. Nech P je podmnožina $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Dvaja hráči I a II hrajú takúto nekonečnú hru. Hráč I vyberie $a_0 \in \{0,1\}$, hráč II vyberie $a_1 \in \{0,1\}$ atď., hráč I vyberá $a_{2n} \in \{0,1\}$, hráč II vyberá $a_{2n+1} \in \{0,1\}$. Hráč I vyhrá, ak postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je prvok množiny P. V opačnom prípade vyhrá hráč II. Ak P je spočítateľná množina, tak možno dať hráčovi II taký návod na hru, aby vždy vyhral. Nájdite taký spôsob hry hráča II.

18. Z výsledku úlohy 17 odvoďte, že množina $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nie je spočítateľná.

19. Aká je mohutnosť množiny všetkých podgrúp aditívnej grupy $(\mathbb{Z}, +, 0)$?

Zapojenie-vypojenie.

1. Na univerzitnej katedre pracuje 30 pracovníkov, pričom každý z nich ovláda aspoň jeden cudzí jazyk. 10 pracovníkov vie po anglicky, 7 nemecky, 6 francúzsky, 5 anglicky a nemecky, 4 anglicky a francúzsky, 3 nemecky a francúzsky.

a) Koľko pracovníkov ovláda všetky tri jazyky?
b) Koľko pracovníkov ovláda práve dva jazyky?
c) Koľko pracovníkov ovláda len anglický jazyk?

2. a) Ukážte, že počet prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné x a neprevyšujú n je rovný $[\frac{n}{x}]$.
b) Nájdite počet prirodzených čísel, neprevyšujúcich 1000, ktoré nie sú deliteľné žiadnym z čísel 3, 5 a 7.
c) Nájdite počet prirodzených čísel, neprevyšujúcich 1000 a nesudeliteľných s číslami 6, 10, 15.

3. Ukážte, že ak $n = 30m$, potom počet prirodzených čísel, neprevyšujúcich n a nedeliteľných žiadnym z čísel 6,10,15 je rovný $22m$.

4. Nech $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sú všetky prvočísla, neprevyšujúce $\sqrt{n}$. Ukážte, že počet prvočísel p, takých, že $\sqrt{n} < p \leq n$ je rovný $n - 1 - \sum\limits_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}S_k$, kde $S_k = \sum[\frac{n}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}]$, kde súčet ide cez všetky podmnožiny $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$.

5. Nájdite počet prvočísel neprevyšujúcich **a)** 25, **b)** 250, c)n.

6. Úloha o nepriateľských dvojiciach. Koľkými spôsobmi môžeme za okrúhly stôl posadiť n nepriateľských dvojíc tak, že žiadni nepriatelia nesedia vedľa seba? Stoličky sú očíslované.

7. Úloha o manželských dvojiciach. Koľkými spôsobmi môžeme posadiť za okrúhly stôl n manželských dvojíc tak, aby sa striedali muži so ženami a žiadna manželská dvojica nesedela vedľa seba? Stoličky sú očíslované.

1. Koľko n-bitových binárnych čísel obsahuje aspoň jednu jednotku?

2. V obchode predávajú 31 druhov zmrzliny. Každé z desať detí si kúpi práve jednu zmrzlinu. Koľko existuje objednávok, pri ktorých si aspoň dve deti kúpia rovnakú zmrzlinu?

3. Koľko je prirodzených čísel do 1000, ktoré sú deliteľné číslami 2 aj 3?

4. Koľko je prirodzených čísel do 1000, ktoré sú deliteľné aspoň jedným z čísel 2 a 3?

5. Koľko je prirodzených čísel do 1000, ktoré sú deliteľné aspoň jedným z čísel 2, 3, a 5?

6. Koľko slov dĺžky 6 možno vytvoriť možno vytvoriť poprehadzovaním písmen slova TIKTAK?

7. Vo vedeckovýskumnom ústave pracuje 67 osôb, z nich 47 ovláda angličtinu, 35 nemčinu a 20 francúzštinu. Vieme, že 23 ľudí vie aj po anglicky, aj po nemecky, 12 ľudí anglicky aj francúzsky a 11 ľudí nemecky aj francúzsky. Všetky tri jazyky ovláda 5 ľudí. Koľko ľudí nevie ani jeden z uvedených cudzích jazykov?

8. Koľko šesťciferných čísel obsahuje každú z číslic $1, 2, 3, 4$?

9. Koľko čísel menších ako 10^6 obsahuje každú z číslic $1, 2, 3, 4$?

10. Koľkými spôsobmi sa dajú poprehadzovať cifry čísla 1112223456 tak, aby žiadne tri rovnaké cifry nenasledovali za sebou?

11. Generátor náhodných čísel v každom kroku vygeneruje jedno z čísel $1, \ldots, 9$ s rovnakou pravdepodobnosťou. Aká je pravdepodobnosť, že po n krokoch je súčin vygenerovaných čísel deliteľný číslom 10?

12. Koľkými spôsobmi vieme postaviť do radu troch angličanov, troch francúzov a troch turkov tak, aby žiadny traja krajani nestáli vedľa seba?

13. Vo výťahu je šesť cestujúcich. Koľkými spôsobmi môžu vystúpiť na štyroch poschodiach, ak na každom poschodí má vystúpiť aspoň jeden?

14. Koľkými spôsobmi sa dá na šachovnici $n \times n$ rozostaviť n veží tak, aby každé neobsadené pole bolo ohrozované aspoň jednou vežou?

15. Koľkými spôsobmi sa dá vybrať 5 kariet so štandardnej sady s 52 kartami tak, aby bola z každej farby vybratá aspoň jedna karta?

16. Koľko permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nemá žiadny pevný bod? (Číslo i je pevným bodom permutácie φ ak $\varphi(i) = i$.)

17. Majme čísla $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$. Koľkými spôsobmi vieme tieto čísla zoradiť do postupnosti tak, aby sa žiadne dve rovnaké čísla nevyskytovali vedľa seba?

1. Majme čísla $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$. Koľkými spôsobmi vieme tieto čísla zoradiť do postupnosti tak, aby sa žiadne dve rovnaké čísla nevyskytovali vedľa seba?

2. Koľko permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nemá žiadny pevný bod? (Číslo i je pevným bodom permutácie φ ak $\varphi(i) = i$.)

3. Zistite, koľko je permutácií množiny $\{1, \ldots, n\}$, ktoré majú práve s pevných bodov. (Výsledok môže obsahovať počty permutácií d_r r-prvkovej bez pevného bodu.)

4. Koľkými spôsobmi vieme r rôznym ľuďom dať každému jeden predmet tak, aby každý typ predmetu dostal aspoň jeden človek, pričom máme n rôznych typov predmetov a z každého typu predmetu máme dostatočný počet kusov?

5. Určte počet všetkých rozdelení n rôznych predmetov do r rôznych priehradok takých, že žiadna priehriadka nemôže ostať prázdna.

6. Koľko je permutácií množiny $\{1, \ldots, n\}$ takých, že číslo $i + 1$ nenasleduje tesne za číslom i pre žiadne $i \in \{1, \ldots, n - 1\}$?

7. Určte počet rozmiestnení n veží na šachovnici $n \times n$, pričom požadujeme, aby sa žiadne dve veže navzájom neohrozovali a aby žiadna veža nestála na hlavnej diagonále.

8. Okolo okrúhleho stola chceme rozsadiť n párov znepriatelených rytierov tak, aby žiadny dvaja nepriatelia nesedeli vedľa seba. Koľkými spôsobmi to vieme spraviť?

9. Okolo okrúhleho stola chceme rozsadiť n manželských párov tak, aby sa muži a ženy pravidelne striedali a žiadna manželská dvojica nesedela vedľa seba. Koľkými spôsobmi to vieme spraviť?