Úlohy k cvičeniu č. 6 a 7

Pri počítaní súm sa snažíme nájsť výraz s rovnakou hodnotou, akú má počítaná suma. Výsledný výraz nesmie obsahovať žiadnu sumu alebo súčin s premenným počtom členov. Aké metódy môžeme použiť na dokazovanie súm?

1. Vypočítať si niekoľko prvých členov, na základe nich si tipnúť výsledok a následne dokázať jeho správnosť (napr. matematickou indukciou). Veľa výsledkov je však takých, že nevidno dobre z nich, čo sú zač.
2. Použiť pri výpočte inú, už známu sumu. Často si to vyžaduje upraviť sumu do tvaru vhodného pre aplikáciu známej sumy. To často obnáša
   - použiť kombinatorické identity;
   - rozpísať si kombinačné čísla cez faktoriály a upraviť ich tak, aby sme dostali kombinačné číslo (čísla) vhodné pre sumáciu;
   - vyňatie konštanty pred sumu ($\sum c \cdot a_k = c \sum a_k$);
   - rozdelenie sumy na viac súm ($\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$);
   - substituovať premenné, upraviť tým sumačný rozsah.
3. Upraviť známu sumu obsahujúcu reálnu premennú x (napr. Binomickú vetu) do vhodné tvaru aplikovaním operácie ako sú derivácia alebo integrácia.
4. Nájsť kombinatorickú interpretáciu sumy (teda nejakú úlohu kde počet možností možno počítať riešenou sumou) a prísť k počtu možností iným, jednoduchším spôsobom. Teda ide o to, čo sme trénovali na cvičení 5, len s tým, že máme len jednu stranu rovnosti.

Pri používaní známych súm príde najviac vhod binomická veta.

Veta 1 (Binomická veta)**.** *Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Môžete však používať aj iné známe sumy, napr. tie, čo sa uvádzajú v skriptách alebo v cvičení 5. Ak však používate sumu z cvičenia, ktorá nemá názov, tak súčasťou úplného riešenia by mal byť aj jej dôkaz. Keď používate sumu, ktorá je pomenovaná (napr. Cauchyho sčítací vzorec), uveďte jej názov – vtedy je vidno, že sa odvolávate na niečo známe a taktiež na aké presne tvrdenie sa odvolávate, teda nemusíte písať do riešenia aj dôkaz.

Úloha 1. Kombinatoricky interpretujte binomickú vetu pre $x \in \mathbb{N}$.

Úloha 2. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{k}.$$

Úloha 3. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Úloha 4. Vypočítajte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} 3^k \binom{n}{k}.$$

Aplikovaním vhodnej operácie (ako napríklad derivácia) na obidve strany rovnosti z vety 1 možno odvodiť ďalšie užitočné identity, ktoré sa dajú využiť aj na výpočet niektorých kombinatorických súm. Viaceré z nasledujúcich úloh sú cielené na použitie tejto metódy.

Úloha 5. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k\binom{n}{k}.$$

Úloha 6. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (3k+1)\binom{n}{k}.$$

Úloha 7. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k2^k\binom{n}{k}.$$

Úloha 8. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1)\binom{n}{k}.$$

Úloha 9. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\binom{n}{k}.$$

Úloha 10. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Úloha 11. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Úloha 12. Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k}.$$

Úloha 13. (*) Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{4k}.$$

Úloha 14. (*) Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{5k}.$$

Úloha 15. (*) Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\binom{n}{4k}.$$

Úloha 16. (*) Vypočítajte
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{k+1}\binom{n}{4k}.$$

Viaceré kombinatorické identity možno dokázať ich transformáciou na ľahšie dokázateľné identity medzi polynómami. To znamená nájsť k danej identite $L(s) = R(s)$ polynómy $p_L(x)$ a $p_R(x)$ také, že koeficient pri x^s je v $p_L(x)$ rovný $L(s)$ a v $p_R(x)$ je rovný $R(s)$. Následne stačí dokázať, že pre všetky x platí $p_L(x) = p_R(x)$ – rovnosť koeficientov je priamym dôsledkom. Pri hľadaní vhodných polynómov $p_L(x)$ a $p_R(x)$ je užitočným nástrojom práve binomická veta. Viď tiež poznámku pod vetou 2.15 zo skrípt.

Aj keď sa použitie tejto metódy obmedzuje iba na relatívne neveľkú triedu identít, ide o základ oveľa všeobecnejšej metódy tzv. *generujúcich funkcií* (niekde tiež *vytvárajúcich funkcií*), v ktorej sa namiesto polynómov používajú „nekonečné polynómy“, čiže *formálne mocninové rady*. To už však presahuje rámec tohto predmetu.

Úloha 17. (*) Pomocou binomickej vety dokážte pre všetky $n, s \in \mathbb{N}$ identitu
$$\binom{n+1}{s+1} = \binom{n}{s} + \binom{n}{s+1}.$$

Úloha 18. (*) Pomocou binomickej vety dokážte pre všetky $n, s \in \mathbb{N}$ identitu
$$\binom{3n}{s} = \sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N}\\ i+j+k=s}}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{k}.$$

Ďalšie úlohy na precvičenie

Úloha 19. V ypočítajte
$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}.$$

Úloha 20. V ypočítajte pre $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$:
$$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{k}{2}(n-k)$$

Výsledky

1.

2. 2^n

3. 0

4. 4^n

5. $n \cdot 2^{n-1}$

6. $3n \cdot 2^{n-1} + 2^n$

7. $2n \cdot 3^{n-1}$

8. $n(n-1) \cdot 2^{n-2}$

9. $n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2}$

10. $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

11. $\dfrac{1+(-1)^n}{n+1}$

12. 2^{n-1}

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19. $\binom{2n}{m}$

20. $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2^{n-3}$ Zdroj: `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~kompisova/uktg1819/du/du02-ries`