Sada domácich úloh č. 2

Termín: nedeľa 15. 3. 2020, 23:59

Úloha 1. Za okrúhly stôl s $2n$ stoličkami chceme usadiť n manželských párov. Manželia musia sedieť vedľa seba, ale je jedno, či muž bude napravo od manželky alebo opačne. Koľkými spôsobmi ich môžeme usadiť? Stoličky sú nerozlíšteľné a pokiaľ sa rozsadenia líšia otočením, tak ich pokladáme za rovnaké

Riešenie. Očíslujme si dve susedné stoličky 1 a 2 v smere hodinových ručičiek. Každé rozsadenie vieme otočiť tak, aby nejakí fixní manželia, nazvime ich *Novákovci* sedeli na týchto dvoch stoličkách (v nejakom poradí). Dokonca existuje práve jedno také otočenie. Preto nám stačí spočítať počet rozsadení, pri ktorých sedia manželia Novákovci na stoličkách 1 a 2. Dvojice stoličiek, na ktorých sedí manželský pár, sú jednoznačne určené. Máme $(n-1)!$ možností, ako na tieto dvojice môžeme umiestniť zvyšných $n-1$ párov. Každý pár, **vrátene Novákovcov**, má ešte 2 možnosti, ako môže sedieť: s mužom po ľavici alebo po pravici ženy. Spolu tak máme $(n-1)! \cdot 2^n$ rôznych rozsadení.

Úvaha boldom neplatí pre $n = 1$, vtedy Novákovci majú len jednu možnosť, ako môžu sedieť, lebo ich výmena sa dá dosiahnuť otočením. Preto pre $n = 1$ máme len jednu možnosť a pre väčšie n máme spomínaných $(n-1)! \cdot 2^n$ rôznych rozsadení.

Úloha 2. Naformulujte úlohu 1 vo formálnych pojmoch, teda na taký štýl, v akom boli definované na prednáške variácie, kombinácie a pod. Vaša formálna definícia má odrážať to, o čom úloha je v reálnom kontexte. Nemusí byť (a ani neočakávam, že bude) z nej jasné, aký vypočítať počet rozsadení.

Riešenie. Nech $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ je množina n mužov a $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ je množina n žien. (Manželské páry tvoria m_i a z_i.)

Nech S je množina všetkých injekcií (a teda aj bijekcií) z množiny $\mathbb{Z}_{2n} = \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ do množiny $M \cup Z$, teda napr.

$$S = \{f \in I_{M\cup Z}^{\mathbb{Z}_{2n}};\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \colon (f^{-1}(m_i) - f^{-}(z_i)) \bmod 2n \in \{1, 2n-1\}\} + +$$

(Ide o množinu všetkých rozsadení, ak sú stoličky očíslované číslami zo $\mathbb{Z}_{2n}$.)

Na množine S zavedieme reláciu R tak, že pre všetky f, $g \in S$ platí

$$fRg \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z}_{2n} \colon \forall i \in \mathbb{Z}_{2n} \colon f(i) = g((i + r) \bmod 2n).$$

Zjavne je R relácia ekvivalencie. Úlohou je určiť počet tried rozkladu množiny S indukovaného reláciou ekvivalencie R.

Iné riešenie *(podľa Samuela Čavoja).* Nech $|P| = n, L = P \times \{M, F\}$ a

$$X = \{f : L \to \mathbb{Z}_{2n} \mid f \text{ je bijekcia } \wedge (\forall p \in P\ )\ f(p, M) = f(p, F) \pm 1\}.$$

Nech $(\forall f, g \in X) f \sim g \iff (\exists k \in \mathbb{Z}_{2n})\,(\forall l \in L) f(l) = g(l) + k$. Zistite $|X/\sim|$.

Iné riešenie *(podľa Jána Prinera).* Koľko existuje relácií $\prec$ na množine $M = \{\,(i, ♂), (i, ♀) \mid i \in \mathbb{Z}_n\,\}$ takých, že:

- $(\forall\ u \in M) \quad u \not\prec u$
- $(\forall\ u \in M)(\exists!\ v \in M) \quad v \prec u$
- $(\forall\ u \in M)(\forall\ v \in M) \quad v \prec^* u$
- $(\forall\ i \in \mathbb{Z}_n) \quad (i, ♂) \prec (i, ♀)\ \vee\ (i, ♀) \prec (i, ♂)$

Úloha 3. Dokážte, že platí

$$\sum_{r \in \mathbb{N}} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{k - 2r + n - 1}{n - 1} = \binom{n}{k}.$$