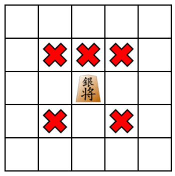
Sada domácich úloh č. 1

Termín

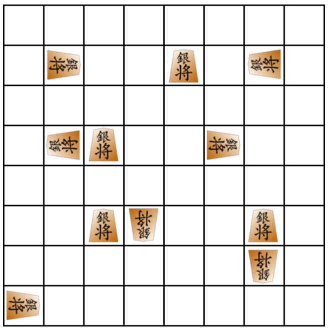
Úloha 1. *Figúrka* strieborný generál *(pochádza z japonského šachu) ohrozuje štyri políčka, s ktorými má spoločný iba roh a jedno políčko priamo pred sebou (ako na obrázku 1). Figúrku možno otáčať do 4 smerov, pričom figúrka má vyznačené, na ktorej strane má predok.*

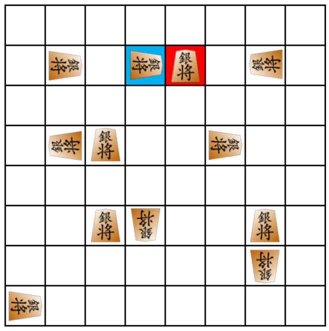


Obr. 1: Políčka, ktoré ohrozuje strieborný generál.

Najviac koľko strieborných generálov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 *tak, aby žiaden strieborný generál neohrozoval iného?*

Na obrázku vľavo možno vidieť príklad rozmiestnenia 11 *strieborných generálov, z ktorých žiaden neohrozuje iného. Na obrázku vpravo zas generál na modrom políčku ohrozuje generála na červenom políčku.*



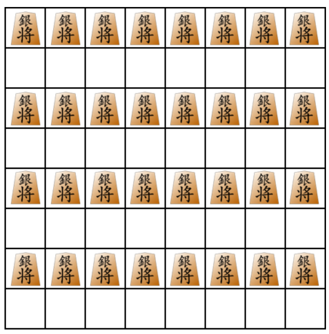


Bonus. *V závislosti od kladného celého čísla* n *určte, aké je riešenie úlohy pre šachovnicu rozmerov* $n \times n$.

Riešenie. Ukážeme, že na šachovnicu možno umiestniť najviac 32 strieborných generálov tak, aby žiaden nebol ohrozený iným.

Umiestnime po osem figúrok do každého nepárneho riadku, pričom všetky figúrky natočíme smerom k hornému okraju šachovnice (obrázok 2). Každý strieborný generál má ďalších generálov iba naľavo alebo napravo od neho a z týchto políčok nemôže byť nimi ohrozený. Našli sme teda vyhovujúce rozmiestnenie 32 strieborných generálov.

Predpokladajme, že na šachovnici sa nachádza viac ako 32 strieborných generálov. Rozdeľme si šachovnicu na 16 neprekrývajúcich sa štvorcov rozmerov 2×2 políčka a pre každý štvorec rozdeľme jeho 4 políčka do dvoch dvojíc, do každej dáme 2 políčka z protiľahlých rohov. Vytvorili sme si tak $2 \cdot 16 = 32$ dvojíc políčok.



Obr. 2

Uvažujme zobrazenie f, ktoré každej figúrke priraďuje dvojicu, v ktorej sa nachádza políčko, na ktorom daná figúrka stojí. Keďže máme 32 dvojíc políčok a viac ako 32 figúrok, z Dirichletovho princípu vieme, že zobrazenie f nie je injektívne. Teda v aspoň jednej dvojici musia byť aspoň dve figúrky. Políčka, na ktorých sú tieto dve figúrky susedia rohom, preto sa strieborní generáli na nich navzájom ohrozujú, a to bez ohľadu na ich otočenie (keďže strieborný generál ohrozuje všetky 4 políčka susediace iba rohom). Tým sme ukázali, že ak máme viac ako 32 strieborných generálov, tak sa už nejakí dvaja ohrozujú (dokonca navzájom).

Riešenie bonusovej úlohy. Ak máme šachovnicu rozmerov $n \times n$, tak pre optimálne umiestnenie figúrok vieme zovšeobecniť rozmiestnenie pre 8×8. Umiestnime po n strieborných generálov do každého nepárneho riadku. Takéto rozmiestnenie vyhovuje z rovnakého dôvodu, ako pri 8×8. Dostaneme tak na šachovnici $\lceil n/2 \rceil n$ strieborných generálov.

Nech je n párne a nech je na šachovnici viac ako $n^2/2$ figúrok. V tomto prípade vieme celkom priamočiaro zovšeobecniť úvahy z prípadu 8×8. Rozdeľme si políčka šachovnice na $n^2/4$ neprekrývajúcich sa štvorcov rozmeru 2×2. Z Dirichletovho princípu potom vieme, že v nejakom štvorci 2×2 musia byť aspoň traja strieborní generáli. Z nich aspoň dvaja musia byť v protiľahlých rohoch, a teda tí dvaja sa ohrozujú.

Ak $n = 2k+1$ je nepárne, tak chceme ukázať, že na šachovnici nemôže byť viac ako $n(n+1)/2 = (2k+1)(k+1)$ strieborných generálov, z ktorých žiaden neohrozuje iného. Toto tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa k.

Ak $k = 0$, tak máme šachovnicu 1×1 a na ňu viac ako $(2 \cdot 0+1)(0+1) = 1$ strieborného generála neumiestnime.

Predpokladajme, že pre nejaké celé $k \geq 0$ na šachovnicu rozmerov $(2k+1) \times (2k+1)$ vieme umiestniť bez ohrozenia najviac $(2k+1)(k+1)$ figúrok. Uvažujme šachovnicu rozmerov $(2k+3) \times (2k+3)$ a predpokladajme, že máme na nej umiestnených viac ako $(2k+3)(k+2)$ figúrok. Zoberme si štvorec $(2k+1) \times (2k+1)$ vpravo dole šachovnice na obrázku 3 vyznačený šedou). Ak by v ňom bolo viac ako $(2k+1)(k+1)$ figúrok, tak z indukčného predpokladu by sa nejaké dve ohrozovali. Preto v tomto štvorci môže byť najviac $(2k+1)(k+1)$ figúrok. Teda vo zvyšnom „elku“ (na obrázku 3 biela časť) šachovnice musí byť viac ako $(2k+3)(k+2) - (2k+1)(k+1) = 4k+5$ figúrok.

Políčka v ostávajúcej časti šachovnice si rozdelíme do skupín. Políčko, ktoré sa nachádza v r-tom riadku a s-tom stĺpci označíme (r, s). Uvažujme množiny políčok:

- $\{(i,1),(i+1,2)\}$ pre každé $i \in \{1,2,\ldots,2k+2\}$, teda spolu $2k+2$ množín políčok;
- $\{(1,i),(2,i+1)$ pre každé $i \in \{2,3,\ldots,2k+2\}$, teda spolu $2k+1$ množín políčok;
- dve množiny $\{(2k+3,1)\}$ a $\{(1,2k+3)\}$ po jednom políčku.

(Pre $k = 3$ si môžete skontrolovať rozdelenie políčok na obrázku 3.) Spolu sme políčka ostávajúceho úseku šachovnice rozdelili do $4k+5$ množín. My sme však ukázali, že v tejto časti musí byť viac ako $4k+5$ figúrok. Preto z Dirichlerovho princípu existujú dve figúrky v jednej množine, a tie sa musia ohrozovať. Tým je dôkaz indukčného kroku hotový.

1	9	10	11	12	13	14	15	17
2	1	9	10	11	12	13	14	15
3	2	18	24	25	26	27	28	30
4	3	19	18	24	25	26	27	28
5	4	20	19	31	35	36	37	39
6	5	21	20	32	31	35	36	37
7	6	22	21	33	32	40	42	44
8	7	23	22	34	33	41	40	42
16	8	29	23	38	34	43	41	45

Obr. 3: Príklad poskupinkovania políčok pre šachovnicu 9×9

Úloha 2. *Hanka má v šatníku:*

- 5 *kusov plaviek,*
- 7 *kusov klobúkov,*
- 4 *kusy okuliarov,*
- 6 *kusov náramkov,*
- 7 *kusov náhrdelníkov.*

Všetky spomínané kusy sú navzájom rozlíšené. Hanka sa chce obliesť na pláž, pričom dodržiava nasledovné pravidlá:

- *Musí mať na sebe práve jedny plavky.*
- *Nosenie klobúku, okuliarov, náramka a náhrdelníka nie je povinné, ale zo žiadneho doplnky nesmie mať na sebe viac ako jeden kus.*
- *Pokiaľ si dá na seba klobúk, musí mať aj okuliare.*

Koľko má Hanka spôsobov, ako sa môže na pláž obliecť? Nájdite formálnu reprezentáciu možností oblečenia, zapíšte množinu všetkých možností a určte jej počet prvkov pomocou teorém z prednášky.

Riešenie. Označme množiny Hankinych plaviek, klobúkov, okuliarov, náramkov a náhrdelníkov postupne P, K, O, R, H. Ďalej nech n je prvok nenachádzajúci sa v množine $P \cup K \cup O \cup R \cup H$ a nech $P' = P \cup \{n\}$, $K' = K \cup \{n\}$, $O' = O \cup \{n\}$, $R' = R \cup \{n\}$ a $H' = H \cup \{n\}$.

Spôsoby Hankinho oblečenia budeme reprezentovať ako niektoré usporiadané pätice z množiny $P \times K' \times O' \times R' \times H'$, pričom pokiaľ je na niektorej pozícii usporiadanej pätice prvok n, znamená to, že si Hanka daný typ doplnku nevzala. Spôsoby oblečenia rozdelíme na dve množiny podľa toho, či si Hanka zoberie na pláž klobúk:

1. Ak si Hanka nevezme klobúk, množina všetkých spôsobov oblečenia je $M_1 = P \times \{n\} \times O' \times R' \times H'$.
2. Ak si Hanka vezme klobúk, množina všetkých spôsobov oblečenia je $M_2 = P \times K \times O \times R' \times H'$.

Zjednotením týchto dvoch množín teda dostávame množiny všetkých spôsobov oblečenia

$$P \times \{n\} \times O' \times R' \times H' \cup P \times K \times O \times R' \times H'.$$

Počet jej prvkov vieme vypočítať ako

$$\begin{aligned}
&|P \times \{n\} \times O' \times R' \times H' \cup P \times K \times O \times R' \times H'| = \\
&= |P \times \{n\} \times O' \times R' \times H'| + |P \times K \times O \times R' \times H'| = \\
&= |P| \cdot |\{n\}| \cdot |O'| \cdot |R'| \cdot |H'| + |P| \cdot |K| \cdot |O| \cdot |R'| \cdot |H'| = \\
&5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 + 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 = 9240.
\end{aligned}$$