Sada domácich úloh č. 2

Termín: nedeľa 15. 3. 2020, 23:59

Úloha 1. *(2 body)* Katka, Lenka, Norbert, Marek a Oľga nazbierali 47 nerozlíšiteľných jabĺk. Chcú si ich rozdeliť tak, že Katka a Lenka dostanú párny počet jabĺk a Norbert, Marek a Oľga dostanú nepárny počet jabĺk. Koľkými spôsobmi to môžu spraviť?

Riešenie. Označme počty jabĺk, čo nazbierali Katka, Lenka, Norbert, Marek a Oľga, postupne $2k$, $2l$, $2m+1$, $2n+1$ a $2o+1$, kde k, l, m, n a o sú nezáporné celé čísla. Počet spôsobov, ktorými si môžu jablká rozdeliť, aby splnili podmienky, je totožný s počtom riešením rovnice

$$2k + 2l + 2m + 1 + 2n + 1 + 2o + 1 = 47.$$

Túto rovnicu možno ekvivalentne upraviť na

$$\begin{aligned} 2(k + l + m + n + o) &= 44, \\ k + l + m + n + o &= 22. \end{aligned}$$

Uvažujme kombinácie s opakovaním 22-hej triedy z prvkov $\{K, L, M, N, O\}$. Každému riešeniu rovnice $k + l + m + n + o = 22$ vieme priradiť jednu kombináciu, v ktorej k-krát vyberieme prvok K, …, o-krát vyberieme prvok O. Preto je počet riešení rovnice, a teda aj náš hľadaný počet rozdelení jabĺk

$$\binom{5+22-1}{22} = \binom{26}{22} = 14\,950.$$

Poznámka. To, čo sa tu dialo, možno bez rovníc opísať aj nasledovne: Najprv dáme Norbertovi, Marekovi a Oľge po jednom jablku a zvyšných 44 jabĺk rozdelíme do dvojíc. Medzi deti budeme rozdeľovať len tieto dvojice jabĺk.

Úloha 2. *(2 body)* Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú karty práve troch farieb a z jednej farby?

Riešenie. Najskôr vyberieme tri farby, ktoré sa na ruke budú vyskytovať, čo sú $\binom{4}{3} = 4$ spôsoby. Z nich ešte musíme vybrať farbu, ktorá bude trikrát, na čo máme 3 možnosti. Keď už máme vybrané farby, tak trom kartám s rovnakou farbou môžeme vybrať hodnoty $\binom{13}{3}$ spôsobmi a zvyšným dvom kartám $13 \cdot 13$ spôsobmi. Vždy sme mali počet možností ďalšej voľby rovnaký nezávisle na predchádzajúcich voľbách. Taktiež sme každú možnosť týmto pokryli práve raz. Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu teda máme spolu

$$\binom{4}{3} \cdot 3 \cdot \binom{13}{3} \cdot 13 \cdot 13 = 580\,008 \quad \text{možností.}$$

Úloha 3. *(2,5 boda)* Vypočítajte sumu

$$\sum_{k=1}^{m} k \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}.$$

Riešenie algebraickými úpravami. Na začiatok využijeme, že platí

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{m!} = \frac{n!}{m!(m-n)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \binom{n}{m}\binom{m}{k}. \tag{1}$$

Taktiež si podobne vieme rozpísať

$$k\binom{m}{k} = k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} = m \cdot \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} = m\binom{m-1}{k-1}. \tag{2}$$

S využitím týchto poznatkov si vieme sumu prepísať do tvaru

$$\sum_{k=1}^{m} k \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{m} k \binom{n}{m} \binom{m}{k} \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{m} m \binom{n}{m} \binom{m-1}{k-1},$$

v ktorom vystupuje sumačná premenná k iba v jednom člene. Preto môžeme vyňať konštantné členy pred sumu a pomocou binomickej vety dokončiť jej výpočet

$$\sum_{k=1}^{m} m\binom{n}{m}\binom{m-1}{k-1} = m\binom{n}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1} = m\binom{n}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\binom{m-1}{l} = m\binom{n}{m}\cdot 2^{m-1}.$$

Poznámka. Platnosť vzťahu (1) možno odvodiť aj z toho, že ľavá strana počíta počet spôsobov, ako môžeme vyberať z n prvkov k, ktoré označíme A, a potom zo zvyšných $n-k$ prvkov vyberieme $m-k$ prvkov, ktoré označíme B. Tento počet vieme vypočítať aj tak, že najprv vyberieme z n prvkov m, z ktorých následne vyberieme k, ktoré označíme A a zvyšné z týchto m prvkov označíme B.

Riešenie cez kombinatorickú úvahu. Zo sumy môžeme vidieť, že si z n vyberáme k prvkov, označme si ich A. Z týchto k A-čkových prvkov si vyberieme ešte jeden špeciálny. Povedzme, že jedno A si podčiarkneme. Zo zvyšných $n-k$ prvkov si ešte vyberieme $m-k$ prvkov, ktoré si označíme B. Zvyšné nevybrané prvky si označíme C. Číslo k môže nadobúdať hocijaké hodnoty od 1 po m, ale stále nám platí, že počet A-čok a B-čok je rovnaký – je to m. Poďme to teda dať dohromady.

Budeme počítať počet n-prvkových postupností zložených z písmen A, B, C, ktoré obsahujú v súčte presne m písmen A a B a navyše obsahujú jedno A, ktoré je podčiarknuté. Rozložíme si všetky postupnosti na diskjunktné množiny podľa počtu písmen A. Počet postupností, ktoré obsahujú presne k znakov A (vrátane podčiarknutého) je

$$k\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

Totiž, máme $\binom{n}{k}$ spôsobov, ako vybrať pozície, na ktorých bude znak A, pre každý výber môžeme k spôsobmi vybrať podčiarknuté A a potom vždy môžeme vybrať $\binom{n-k}{m-k}$ miesta, na ktorých budú znaky B. Počet všetkých takýchto postupností vypočítame teda podľa pravidla súčtu presne našou sumou.

Iný spôsob, ako vieme dostať počet týchto postupností, je že si najprv vyberieme pozície, na ktorých budú znaky A alebo B, na nevybrané pozície umiestnime rovno C. To vieme spraviť $\binom{n}{m}$ spôsobmi. Spomedzi týchto m pozícií si vyberieme jednu, na ktorej bude podčiarknuté A, na čo máme zakaždým m možností. Na zvyšných $m-1$ pozíciách môžu byť úplne ľubovoľne znaky A a B, pre každú z nich máme 2 možnosti, teda spolu 2^{m-1} možností. Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu tak je všetkých postupností

$$\binom{n}{m}m\cdot 2^{m-1},$$

čo je teda aj výsledok našej sumy.