Sada domácich úloh č. 2

Termín: nedeľa 15. 3. 2020, 23:59

Úloha 1. *(2 body)* Koľko existuje permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ (chápané ako postupnosti), ktoré pre žiadne kladné celé číslo i neobsahujú súvislú podpostupnosť $(3i-1, 3i, 3i+1)$?

Riešenie. Nech M je množina všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, 3n\}$. Pre $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ označme M_i množinu tých permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, 3n\}$, ktoré obsahujú súvislú podpostupnosť $(3i-1, 3i, 3i+1)$. Tieto súvislé podpostupnosti budeme volať *zakázané*. Podľa princípu inklúzie a exklúzie vieme vypočítať počet permutácií neobsahujúcich žiadnu zakázanú postupnosť ako

$$|M - (M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n)| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k S_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}|.$$

Pre fixné i_1, i_2, ..., i_k je $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}$ množina tých permutácií z M, ktoré obsahujú fixných k zakázaných súvislých podpostupnsotí (a možno aj ďalšie iné). Teraz určíme ich počet. Pre každé $1 \le j \le k$ zakázanú súvislú podpostupnosť $(3i_j - 1, 3i_j, 3i_j + 1)$ nahradíme jedným členom $(3i_j)$. Celkovo tak prídeme o $2k$ členov. Hľadaný počet permutácií z množiny $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}$ je teda rovný počtu permutácii $(3n - 2k)$ čísel, teda $(3n - 2k)!$.

Teraz môžeme dopočítať našu sumu

$$\begin{aligned}
|M - (M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n)| &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}| = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n} (3n - 2k)! = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (3n - 2k)!.
\end{aligned}$$

Úloha 2. *(2 body)* Nech G je súvislý 3-regulárny graf. Dokážte, že graf G má takú kostru T, že každá kružnica grafu G má s kostrou T aspoň jednu spoločnú hranu.

Riešenie. Keďže graf G je súvislý, tak isto nejakú kostru má. Nech T je kostra grafu G taká, že počet kružníc grafu G, ktoré neobsahujú žiadnu hranu kostry T, je najmenší možný. Pre spor predpokladajme, že tento počet takýchto *zlých* kružníc je nenulový. Nech C je jedna taká kružnica s vrcholmi v_1, v_2, ..., v_k spojenými v tomto poradí. Každý z vrcholov v_i (pre $1 \le i \le k$) má dve hrany v kružnici C, preto jeho zvyšná hrana – označme si ju e_i – musí byť obsiahnuté v kostre T.

Nech T' je podgraf grafu G, ktoré vznikne z kostry T pridaním hrany $\{v_1, v_2\}$ a odobraním hrany h_1. Podgraf T' je zjavne súvislý a má $|V(G)| - 1$ hrán (rovnako ako kostra T), preto je T' kostra grafu G. Kostra T' obsahuje aspoň jednu hranu kružnice C. Navyše, uvažujme ľubovoľnú kružnicu K grafu G, ktorá má aspoň jednu hranu spoločnú s kostrou T. Tvrdíme, že kružnica K má spoločnú hranu aj s kostrou T'. Ak by to tak nebolo, tak kružnica K musela mať s kostrou T spoločnú iba hranu h_1. To je totiž jediná hrana T, ktorá sa nenachádza v kostre T'. Žiadna z hrán h_2, ..., h_n však nepatrí do kružnice K. Tým pádom kružnica K nemá ako opustiť vrcholy kružnice C, čo je spor.

Dostali sme tak, že každá kružnica grafu G, ktorá má spoločnú hranu s kostorou T, má spoločnú hranu aj s kostrou T'. Navyše, s kostrou T' má spoločnú hranu aj kružnica K. Tým pádom sme našli kostru T' grafu G, ktorá má menej zlých kružníc ako kostra T. To je spor s predpokladom, že kostra T mala najmenej zlých kružníc. Preto kostra T je hľadaná kostra grafu G, ktorá nemá žiadne zlé kružnice.

Úloha 3. *(2 body)* Dokážte alebo vyvráťte nasledovné tvrdenia:

a) $\binom{n}{47} = \Theta(n^{47})$,

b) $\binom{n}{47} = o(n^{47})$,

c) $\binom{n}{47} = \omega(n^{47})$,

d) $\binom{n}{47} \sim (n^{47})$,

e) $\binom{47}{n} = O(47^n)$,

f) $\binom{47}{n} = \Omega(47^n)$.

Riešenie. Tvrdenie a) a e) sú jediné pravdivé. Dokážeme najprv a). Pre každé $n \geq 47$ platí

$$\binom{n}{47} = \frac{n(n-1)\dots(n-46)}{47!} \leq \frac{n^{47}}{47!} \leq n^{47},$$

preto $\binom{n}{47} = O(n^{47})$. Taktiež pre $n \geq 100$ platí

$$\binom{n}{47} = \frac{n(n-1)\dots(n-46)}{47!} \geq \frac{(\frac{n}{2})^{47}}{47!} = \frac{1}{47! \cdot 2^{47}} \cdot n^{47}, \quad \text{čize} \quad n^{47} \leq 47! \cdot 2^{47} \cdot \binom{n}{47},$$

a preto $\binom{n}{47} = \Omega(n^{47})$. Tým sme ukázali, že platí a) $\binom{n}{47} = \Theta(n^{47})$.

Vyvrátime b), c), d). Na to vypočítame limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{47}}{n^{47}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-46)}{47! \cdot n^{47}} = \frac{1}{47!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{46}{n}\right) = \frac{1}{47!}.$$

Keďže nám táto limita nevyšla ani 1, ani 0, ani nekonečno, tak neplatí ani b), ani c), ani d).

Funkcia $\binom{47}{n}$ je pre $n \geq 48$ nulová Preto pre $n \geq 48$ platí $\binom{47}{n} = 0 \leq 47^n$, teda e) $\binom{47}{n} = O(47^n)$. Naopak f) neplatí, lebo pre každé $n \geq 48$ (teda pre ľubovoľne veľké n) a každú konštantu c máme $47^n > 0 = c \cdot \binom{47}{n}$, teda $\binom{47}{n} \neq 47^n$.

Bonus. *(2 body)* Pre celé číslo $n \geq 1$ definujeme graf Q_n nasledovne: Vrcholy grafu Q_n sú n-prvkové postupnosti z čísel 0 a 1. Hranou spojíme práve tie postupnosti, ktoré sa líšia na práve jednom mieste. V závislosti od n určte $\kappa(Q_n)$ a $\lambda(Q_n)$.

Riešenie. Ukážeme, že $\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$ pre každé $n \geq 1$. Graf Q_n je zjavne n-regulárny, preto podľa tvrdenia 4.1 platí $\kappa(Q_n) \leq \lambda(Q_n) \leq n$. Tým pádom nám stačí ukázať, že $\kappa(Q_n) \geq n$. To ukážeme matematickou indukciou.

Pre $n = 1$ je Q_1 zjavne súvislý.

Predpokladajme, že pre nejaké n je graf Q_n n-súvislý. Ukážeme, že potom je graf Q_{n+1} $(n+1)$-súvislý. Nech G_0, resp. G_1 je podgraf grafu Q_{n+1} indukovaný postupnosťami, ktoré sa končia na O, resp. 1. Zjavne podgrafy G_0 a G_1 sú izomorfné s grafom Q_n. Zoberme si ľubovoľných n vrcholov $v_1, \dots, v_n$ grafu Q_n. Ukážeme, že graf $Q_n - \{v_1, \dots, v_n\}$ je súvislý.

Prípad 1. Ak všetky vrcholy $v_1, \dots, v_n$ patria do G_0, tak každý vrchol grafu G_0 je napojený na vrchol grafu G_1 (im zodpovedajúce postupnosti sa líšia na poslednom mieste). Graf G_1 je neporušený, a preto súvislý. Z toho vyplýva, že graf $Q_{n+1} - \{v_1, \dots, v_n\}$ je súvislý.

Prípad 2. Ak každý z podgrafov G_0 a G_1 obsahuje aspoň jeden z vrcholov $v_1, \dots, v_n$, tak zároveň ich môže obsahovať najviac $n-1$. Keďže sú aj G_0, aj G_1 n-súvislé (z indukčného predpokladu), tak po odstránení vrcholov $v_1, \dots, v_n$ z podgrafov G_0 a G_1 dostaneme opäť súvislé podgrafy. Už nám stačí ukázať, že tieto podgrafy budú spojené aspoň jednou hranou. Medzi podgrafmi G_0 a G_1 vedie 2^n hrán: hrany $\{x_0 \dots x_n 0, x_0 \dots x_n 1\}$, pričom žiadne dve z týchto hrán nemajú spoločný vrchol. Preto keď odstránime z grafu Q_{n+1} n vrcholov, tak prídeme o najviac n hrán medzi podgrafmi G_0 a G_1. Pre $n \geq 2$ platí $2^n > n$, takže nám tam nejaké hrany ostanú.

Takže sme ukázali, že graf Q_{n+1} je $(n+1)$-súvislý, čím je dôkaz indukciou hotový.