Cvičenie 3: Základné enumeračné pravidlá

Veta 1 (Pravidlo súčtu). *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú po dvoch disjunktné konečné množiny. Nech X je ich zjednotenie,*

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = \bigcup_{k=1}^{n} X_k.$$

Potom

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n| = \sum_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Úloha 1. Medveď si môže dať na obed buď jednu z 50 (rozlíšiteľných) oviec alebo jedného z troch (rozlíšiteľných) valachov (nie však oboje naraz). Z koľkých možností si môže vybrať dohromady?

Úloha 2. Pod grúňom sa pasú dve čriedy o n ovciach a jedna črieda o m ovciach (všetky ovce sú navzájom rozlíšiteľné). Koľko možností má medveď, keď chce zjesť práve jednu ovcu?

Veta 2 (Pravidlo súčinu). *Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú ľubovoľné konečné množiny. Potom*

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n| = \prod_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Úloha 3. Háďžeme troma kockami rôznych farieb. Koľko môže padnúť rôznych trojíc čísel?

Úloha 4. Najnovší model lopaty vyrábajú v šiestich výkonnostných a v troch energetických kategóriách, pričom ku každej z výkonnostných kategórií je k dispozícii každá z energetických kategórií. Koľko variantov je na trhu celkovo?

Úloha 5. Medveď sa ráno zdržuje pri salaši S_1, na obed pri salaši S_2 a večer pri salaši S_3. Na salaši S_1 majú tridsať oviec, na salaši S_2 sto oviec a na salaši S_3 päťdesiat oviec (všetky ovce sú rozlíšiteľné). Medveď si chce dať na raňajky, obed aj večeru práve jednu ovcu. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii?

Úloha 6. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel.

Úloha 7. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry a najviac päť cifier.

Úloha 8. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry, najviac päť cifier a rovnaké posledné dve cifry.

Úloha 9. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?

Úloha 10. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa buď začínajú na a, alebo sa súčasne nezačínajú na a a končia na c?

Úloha 11. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b?

Úloha 12. Nájdite počet kladných deliteľov čísla 120.

Úloha 13. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^8$.

Úloha 14. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6$.

Úloha 15. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry rôzne.

Úloha 16. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú každé z písmen aspoň raz?

Veta 3 (Pravidlo mocnenia). *Nech A, B sú ľubovoľné konečné množiny, $|A| = k$, $|B| = n$. Potom $|B^A| = |B|^{|A|} = n^k$.*

V kombinatorike väčšinou pracujeme s konvenciou $0^0 = 1$ – pravidlo mocnenia tak dáva zmysel aj pre $n = m = 0$, čo súhlasí so skutočnosťou, že existuje jediné zobrazenie medzi dvoma prázdnymi množinami.

Definícia 1 (Variácie s opakovaním). Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže prvok množiny B^A.

Veta 4. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B je n^k.*

Úloha 17. Pod grúňom je 10 salašov a na každom majú 50 (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

Úloha 18. Pod grúňom je n salašov a na každom majú m (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

Úloha 19. Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$?

Úloha 20. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?

Úloha 21. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa končia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 22. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú práve jeden výskyt písmena c?

Úloha 23. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel.

Úloha 24. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých párnych n-ciferných čísel.

Úloha 25. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel deliteľných číslom 4.

Úloha 26. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel deliteľných číslom 5.

Veta 5 (Pravidlo rozdielu). *Nech A, U sú ľubovoľné konečné množiny také, že $A \subseteq U$. Potom*

$$|U \setminus A| = |U| - |A|.$$

Úloha 27. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa nekončia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 28. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré neobsahujú práve jeden výskyt písmena c?

Úloha 29. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 4.

Úloha 30. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 5.

Úloha 31. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré obsahujú aspoň jednu z cifier $\{1, 3, 7\}$.

Riešenia

Riešenia úloh sú celkom provizórne. Je možné, že obsahujú nejaké chyby, preklepy. Budem rád, pokiaľ mi každú nezrovnalosť nahlásite mailom na rajnik zavinac dcs.fmph.uniba.sk.

1. 53

2. $n + m$

3. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

4. $6 \cdot 3 = 18$

5. $30 \cdot 100 \cdot 50 = 150\,000$

6. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

7. $9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 = 99\,900$

8. 9 990

9. $2 \cdot 4^4 = 512$

10. $4^4 + 3 \cdot 4^3 = 448$

11. $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 108$

12. $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

13. $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 810$

14. $13 \cdot 7 \cdot 7$ deliteľov $(3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6 = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 7^6)$

15. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

16. $4 \cdot (6 \cdot 10) = 240$

17. 50^{10}

18. m^n

19. 4^n

20. $2 \cdot 4^{n-1}$

21. $4^{n-3} \cdot 4 = 4^{n-2}$

22. $n \cdot 3^{n-1}$

23. $9 \cdot 10^{n-1}$

24. $9 \cdot 10^{n-2} \cdot 5$ pre $n \geq 2$, pre $n = 1$ je to 5

25. $9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ $(n \geq 3)$

26. $9 \cdot 10^{n-2} \cdot 2$ $(n \geq 2)$

27. $4^n - 4^{n-2}$

28. $4^n - n \cdot 3^{n-1}$

29. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ (pre $n \geq 3$)

30. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-2} \cdot 2$ (pre $n \geq 2$)

31. $9 \cdot 10^{n-1} - 6 \cdot 7^{n-1}$