Cvičenie 4: Štandardné kombinatorické konfigurácie

Veta 1 (Pravidlo súčtu)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú po dvoch disjunktné konečné množiny. Nech X je ich zjednotenie,*

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = \bigcup_{k=1}^{n} X_k.$$

Potom

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n| = \sum_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Veta 2 (Pravidlo súčinu)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú ľubovoľné konečné množiny. Potom*

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n| = \prod_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Pripomíname, že v prípade totožných množín môžeme karteziánsky súčin n totožných množín X zapísať ako $X^n = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n\text{-krát}}$. Z pravidla súčinu teda máme $|X^n| = |X|^n$.

Veta 3 (Zovšeobecnené pravidlo súčinu, neformálna verzia)**.** *Nech X je konečná množina. Nech $A \subseteq X^k$, $k \geq 2$, je podmnožina karteziánskeho súčinu X^k, ktorej prvky označíme $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ a ktorá spĺňa podmienky:*

(1) *prvok x_1 je možné z množiny X vybrať n_1 spôsobmi;*

(2) *pre každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, po akomkoľvek výbere usporiadanej i-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ je možné prvok x_{i+1} vybrať vždy n_{i+1} spôsobmi.*

Potom $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.

Ak by sme chceli vetu 3 formulovať úplne formálne, tak to vieme spraviť na štýl toho, ako vieme zapísať množinu všetkých 4-ciferných čísel, v ktorých sa cifry neopakujú:

$$\{(a, b, c, d);\ a \in C - \{0\}, b \in C - \{a\}, c \in C - \{a, b\}, d \in C - \{a, b, c\}\},$$

kde $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$ je množina cifier. Prvky a, b, c, d tak neberieme z pevných množín ako pri pravidle súčinu, ale volíme ich z množiny, ktorá je určená voľbou predošlých prvkov. Napr. prvok c vyberáme z množiny $C - \{a, b\}$, ktorej konkrétna podoba závisí od výberu a, b, avšak nie od výberu d. (Pripomíname, že je dôležité, že jej počet prvkov nezávisí na tom, aké a, b zvolíme.) Množinu typu $C - \{a, b\}$ formálne vyjadríme ako množinu $M_{a,b}$, ktoré môže byť pre rôzne voľby a, b iná.

Veta 4 (Zovšeobecnené pravidlo súčinu)**.** *Nech X, M sú konečné množiny, $k \geq 2$ a nech pre každú usporiadanú i-ticu $(x_1, x_2, \ldots, x_i) \in X^i$, kde $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, máme množinu $M_{x_1,\ldots,x_i}$, pričom sú splnené podmienky::*

(1) *$|M| = n_1$;*

(2) *pre každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ a každú usporiadanú i-ticu $(x_1, x_2, \ldots, x_i) \in X^i$ platí $|M_{x_1,\ldots,x_i}| = n_{i+1}$.*

Potom

$$|\{(x_1, x_2, \ldots, x_k);\ x_1 \in M, (\forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\})(x_{i+1} \in M_{x_1,\ldots,x_i})\}| = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k.$$

Zovšeobecnené pravilo súčino vieme použiť aj v prípade, ak počítame prvky karteziánskeho súčinu rôznych množín $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Vtedy nám stačí zvoliť vo vete $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$.

Definícia 1 (Variácie s opakovaním)**.** Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže prvok množiny B^A.

Veta 5. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B je n^k.*

Definícia 2 (Variácie bez opakovania)**.** Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné injektívne zobrazenie $f\colon A \to B$.

Veta 6. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B je*

$$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

→ **Úloha 1.** Najnovší model lopaty vyrábajú v šiestich výkonnostných a v troch energetických kategóriách, pričom ku každej z výkonnostných kategórií je k dispozícii každá z energetických kategórií. Koľko variantov je na trhu celkovo?

→ **Úloha 2.** Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b?

→ **Úloha 3.** Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X?

→ **Úloha 4.** Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré začínajú párnym číslom?

Úloha 5. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré začínajú nepárnym číslom?

→ **Úloha 6.** Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne?

Úloha 7. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?

→ **Úloha 8.** Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých aspoň 97-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne?

Úloha 9. V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Koľko existuje rôznych ťahov, ak záleží na poradí vytiahnutých čísel?

Úloha 10. Máme $n \geq 7$ kníh, ale len 7 voľných miest na poličke. Koľko máme možností na uloženie kníh na prázdne miesta?

Úloha 11. Koľko prvkov obsahuje množina X taká, že počet variácií bez opakovania druhej triedy z prvkov X je 240?

Úloha 12. Máme množinu, ktorá má x prvkov. Ak sa počet jej prvkov zväčší o 2, tak počet variácií bez opakovania tretej triedy z jej prvkov sa zväčší o 384. Nájdite x.

Definícia 3 (Permutácie bez opakovania)**.** Nech $A = \{1, \ldots, n\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Permutáciou množiny B* nazveme ľubovoľné bijektívne zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže variáciu bez opakovania n-tej triedy z n-prvkov množiny B.

Veta 7. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Počet permutácií množiny B je*

$$n! := n^{\underline{n}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (n-k).$$

→ **Úloha 13.** Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo práve jedno čierne políčko?

Úloha 14. Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 100-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?

Nech A je konečná množina. Zjavne existuje bijekcia medzi podmnožinami množiny A a zobrazeniami $f\colon A \to \{0,1\}$: ku každej podmnožine $B \subseteq A$ totiž môžeme definovať jej *charakteristické zobrazenie* $\chi_B\colon A \to \{0,1\}$ ako

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in B \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \qquad \text{pre všetky } x \in A$$

a naopak, ku každému zobrazeniu $f\colon A \to \{0,1\}$ vieme definovať jeho *nosič* ako množinu

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in A \mid f(a) \neq 0\}.$$

Ľahko vidieť, že obe priradenia $B \mapsto \chi_B$ a $f \mapsto \operatorname{supp}(f)$ sú injektívne (v skutočnosti ide dokonca o navzájom inverzné bijekcie). Podmnožín konečnej množiny A je teda presne toľko, čo prvkov množiny $\{0,1\}^A$. Z pravidla mocnenia potom dostávame:

Dôsledok 1. *Nech A je ľubovoľná konečná množina taká, že $|A| = n$. Potom*

$$|\mathscr{P}(A)| = |\{0,1\}^A| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Z tohto dôvodu sa potenčná množina $\mathscr{P}(A)$ často zvykne označovať aj ako 2^A.

→ **Úloha 15.** Koľkými spôsobmi môže vlčia svorka zjesť bližšie neurčený počet z celkového počtu 100 (rozlíšiteľných) oviec?

Definícia 4 (Kombinácie bez opakovania)**.** Nech B je konečná množina taká, že $|B| = n$ a nech $k \in \mathbb{N}$. *Kombináciou bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľnú k-prvkovú podmnožinu množiny B.

Množina všetkých k-prvkových podmnožín konečnej množiny B – čiže množina všetkých kombinácií k-tej triedy z B – sa zvykne označovať ako $\mathscr{P}_k(B)$ alebo ako $\binom{B}{k}$.

Veta 8. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet kombinácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B je*

$$|\mathscr{P}_k(B)| = \left|\binom{B}{k}\right| = \binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Ak navyše $k \leq n$, tak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

→ **Úloha 16.** V hre Mates sa ťahá 5 čísel z 35. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých čísel?

→ **Úloha 17.** V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Z nich je šesť čísel riadnych a jedno dodatkové. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých riadnych čísel, ale záleží na rozdiele medzi riadnym a dodatkovým číslom?

→ **Úloha 18.** Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú rovnaký počet oboch písmen?

Úloha 19. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a?

Úloha 20. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a?

$\rightarrow$ **Úloha 21.** Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 6 alebo 7 výskytov písmena a?

Úloha 22. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku párny počet bielych políčok?

$\rightarrow$ **Úloha 23.** Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $2n \times 2n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku bolo rovnako veľa bielych a čiernych políčok?

Úloha 24. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku aj stĺpci párny počet bielych políčok?

V nasledujúcich úlohách rozumieme pod *kartou* usporiadanú dvojicu $(c, n) \in F \times H$, kde

$$F = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \quad \text{a} \quad H = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}.$$

Prvky množiny F nazývame *farby* a prvky množiny H *hodnoty*. Množina hodnôt je lineárne usporiadaná usporiadaním $2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < J < Q < K < A$. Pod *pokrovou kombináciou* rozumieme ľubovoľnú množinu piatich (rôznych) kariet.

$\rightarrow$ **Úloha 25.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií?

$\rightarrow$ **Úloha 26.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet rovnakej farby (*straight flush*)?

Úloha 27. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich štyri karty s rovnakým číslom?

$\rightarrow$ **Úloha 28.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$ (*full house*)?

$\rightarrow$ **Úloha 29.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií iných ako *full house*?

Úloha 30. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, v ktorých majú všetky karty rovnakú farbu (*flush*)?

Úloha 31. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet ľubovoľnej farby (*straight*)?

$\rightarrow$ **Úloha 32.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú trojicu kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve inej hodnoty, navzájom rôznej (*trojica*);

$\rightarrow$ **Úloha 33.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x, dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z, pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (*dva páry*)?

$\rightarrow$ **Úloha 34.** Koľko je všetkých pokrových kombináci, ktoré obsahujú aspoň jedno eso?

Úloha 35. Na večierku je n mužov a n žien. Koľkými spôsobmi sa vedia postaviť do kruhu, ak

a) nie sú žiadne obmedzenia,

b) dve ženy nesmú stáť vedľa seba.

Úloha 36. Za okrúhly stôl s $2n$ stoličkami chceme usadiť n manželských párov. Manželia musia sedieť vedľa seba, ale je jedno, či muž bude napravo od manželky alebo opačne. Koľkými spôsobmi ich môžeme usadiť, ak

a) rozlišujeme stoličky?

b) nerozlišujeme stoličky?

Riešenia

Pokrovú kombináciu dva páry vieme dostať nasledovne:

- Vyberieme hodnotu $a \in H$ pre prvý pár – 13 možností.
- Vyberieme farby $\{f, g\} \in \binom{F}{2}$ pre prvý pár – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme hodnotu $b \in H$ pre druhý pár – 12 možností.
- Vyberieme farby $\{h, i\} \in \binom{F}{2}$ pre prvý pár – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme poslednú kartu $(j, c) \in F \times (H - \{a, b\})$ – $11 \cdot 4$ možností.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu máme $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4$ možností, ako vybrať usporiadanú päticu $(a, \{f, g\}, b, \{h, i\}, (c, j))$, ktorej priradíme pokrovú kombináciu $\{fa, ga, hb, ib, jc\}$. Takto priradíme každú pokrovú kombináciu dvakrát. Preto je výsledný počet pokrových kombinácií

$$\frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4}{2}.$$

1. $6 \cdot 3 = 18$

2. $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 108$

3. 100^{20}

4. $50 \cdot 100^{19}$

5. $50 \cdot 100^{19}$

6. $100^{\underline{20}}$

7. $50 \cdot 99^{\underline{19}}$

8. $100^{\underline{97}} + 100^{\underline{98}} + 100^{\underline{99}} + 100^{\underline{100}}$

9. $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 = 49^{\underline{7}}$

10. $n^{\underline{7}}$

11. 16

12. 8

13. $n!$

14. $50 \cdot 99!$

15. 2^{100}

16. $\binom{35}{5}$

17. $\binom{49}{7} \cdot 7$

18. $\binom{20}{10}$

19. $\binom{20}{7}$

20. $\binom{20}{7} \cdot 2^{13}$

21. $\binom{20}{6} \cdot 2^{14} + \binom{20}{7} \cdot 2^{13}$

22. $2^{n(n-1)}$

23. $\binom{2n}{n}^{2n}$

24. $2^{(n-1)^2}$

25. $\binom{52}{5}$

26. $9 \cdot 4 = 36$

27. $13 \cdot 48 = 624$

28. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744$

29. $\binom{52}{5} - 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 2595216$

30. $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$

31. $9 \cdot 4^5 = 9216$

32. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 48 \cdot 44/2 = 54\,912$

33. $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 123552$

34. $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.