Cvičenie 5: Kombintorické dôkazy identít

Nasledujúce identity je zväčša možné dokázať dvoma principiálne odlišnými spôsobmi: algebraickou manipuláciou alebo kombinatorickou interpretáciou. Hoci nemusí byť na škodu vyriešiť niekoľko úloh aj algebraicky, cieľom je predovšetkým precvičenie *kombinatorických dôkazov*. Takýto kombinatorický dôkaz spočíva v identifikácii vhodných tried kombinatorických konfigurácií, ktorých počet je daný ľavou a pravou stranou identity a v následnom pozorovaní, že medzi týmito triedami existuje bijekcia. Preto sa často hovorí aj o *bijektívnych dôkazoch*.

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Úloha 2. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ platí

$$2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}.$$

Úloha 3. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}.$$

Úloha 4. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}.$$

Úloha 5. Dokážte, že pre všetky $n, m, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m}.$$

Úloha 6. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3 = \binom{3n}{3}.$$

Úloha 7. Dokážte, že pre všetky $n, r, s, t \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{s-t} = \binom{n}{s}\binom{s}{t}\binom{n-s}{r-t}.$$

Úloha 8. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ platí

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Úloha 9. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Úloha 10. Dokážte *Vandermondovu identitu*: pre všetky $n, m, r \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

Úloha 11. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}.$$

Úloha 12. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Úloha 13. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k\binom{n}{k} = 3^n.$$

Úloha 14. Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Úloha 15 (*)**.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n-k}{k} = F_{n+1},$$

kde F_{n+1} je $(n+1)$-vé Fibonacciho číslo.

Úloha 16 (*)**.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^k.$$

> Viaceré kombinatorické identity možno dokázať ich transformáciou na ľahšie dokázateľné identity medzi polynómami. To znamená nájsť k danej identite $L(s) = R(s)$ polynómy $p_L(x)$ a $p_R(x)$ také, že koeficient pri x^s je v $p_L(x)$ rovný $L(s)$ a v $p_R(x)$ je rovný $R(s)$. Následne stačí dokázať, že pre všetky x platí $p_L(x) = p_R(x)$ – rovnosť koeficientov je priamym dôsledkom. Pri hľadaní vhodných polynómov $p_L(x)$ a $p_R(x)$ je užitočným nástrojom práve binomická veta. Viď tiež poznámku pod vetou 2.15 zo skrípt.
>
> Aj keď sa použitie tejto metódy obmedzuje iba na relatívne neveľkú triedu identít, ide o základ oveľa všeobecnejšej metódy tzv. *generujúcich funkcií* (niekde tiež *vytvárajúcich funkcií*), v ktorej sa namiesto polynómov používajú „nekonečné polynómy“, čiže *formálne mocninové rady*. To už však presahuje rámec tohto predmetu.

Úloha 17 (*)**.** Pomocou binomickej vety dokážte pre všetky $n, s \in \mathbb{N}$ identitu

$$\binom{n+1}{s+1} = \binom{n}{s} + \binom{n}{s+1}.$$

Úloha 18 (*)**.** Pomocou binomickej vety dokážte pre všetky $n, s \in \mathbb{N}$ identitu

$$\binom{3n}{s} = \sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N}\\ i+j+k=s}} \binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{k}.$$

Nápovedy k riešeniam

1. Počet spôsobov, ako vybrať k-prvkovú podmnožinu n-prvkovej množiny pričom jeden prvok je špeciálny.

3. Z $n+1$ čísel losujeme k nerozlíšiteľných a jedno dodatkové.

4. Z n čísel losujeme k nerozlíšiteľných a jedno dodatkové.

5. Počet n-písmenových slov z písmen $\{a, b, c\}$ obsahujúcich práva m písmen a a práve k písmen b.

6. Máme po n prvkov na 3 kôpkach, chceme vyberať z nich n. Rozdelíme na prípady podľa toho, po koľko prvkov vyberáme z troch kôpok: $3+0+0$, $2+1+0$, $1+1+1$.

7. Počet slov dĺžky n z písmen $\{a, b, c, d\}$ takých, že počet a a b je s, počet b a c je r, počet b je t.

8. Počet podmnožín (ne)párnej veľkosti. Každá taká podmnožina je jednoznačne určená $n-1$ miestami charakteristického vektora.

9. Z $2n$ prvkov vyberáme podmnožinu n prvkov: vyberieme k z prvých n a z druhých n prvkov vyberieme k, čo tam nie sú.

10. Z $n+m$ prvkov vyberáme r prvkov. Rozdelíme na prípady, kedy vyberáme k z m a zvyšných $r-k$ z m prvkov.

11. Počet n-písmenových slov z $\{a, b, c\}$ obsahujúcich presne k písmen a.

12. Počet spôsobov, ako vylosovať z n čísel nejaký počet a jedno dodatkové číslo.

13. Počet n-písmenových slov z písmen $\{a, b, c\}$.

14. Počet $(k+1)$-prvkových podmnožín $(n+1)$-prvkovej množiny. Rozdelíme na prípady podľa najväčšieho prvku.

15. Počet postupností zložených z čísel $\{1, 2\}$, ktorých súčet je n.