Cvičenie 9: Princíp inklúzie a exklúzie

Veta 1 (Princíp zapojenia a vypojenia). *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú konečné množiny. Potom*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N} \\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}} \left|\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j}\right|.$$

Úloha 1. Každý z pasažierov autobusu hovorí najmenej jedným z jazykov Fwe, Gciriku a Kwangali. 22 ľudí ovláda iba Fwe, 34 ľudí iba Gciriku a 40 ľudí iba Kwangali. Sedem ľudí ovláda Fwe aj Kwangali, no neovláda Gciriku. Traja ľudia ovládajú Fwe aj Gciriku, no neovládajú Kwangali. Piati ľudia ovládajú Gciriku aj Kwangali, no neovládajú Fwe. Ôsmi ľudia napokon ovládajú všetky tri jazyky. Koľko cestujúcich je v autobuse dohromady?

Úloha 2. Každý z pasažierov autobusu hovorí najmenej jedným z jazykov Fwe, Gciriku a Kwangali. 48 ľudí ovláda Fwe, 54 ľudí Gciriku a 59 ľudí Kwangali. 17 ľudí ovláda Fwe aj Gciriku, 18 ľudí ovláda Fwe aj Kwangali a 13 ľudí ovláda Gciriku aj Kwangali. 11 ľudí ovláda všetky tri jazyky. Koľko cestujúcich je v autobuse dohromady?

Úloha 3. V autobuse je celkovo 102 cestujúcich. 49 z nich ovláda jazyk Fwe, 34 jazyk Gciriku a 21 jazyk Kwangali. Siedmi ľudia ovládajú Fwe aj Gciriku, piati Fwe aj Kwangali a deviati Gciriku aj Kwangali. Všetkými troma jazykmi hovoria dvaja ľudia. Koľkí z cestujúcich nehovoria žiadnym z týchto troch jazykov?

Úloha 4. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ je deliteľných aspoň jedným z čísel 2 a 3?

Úloha 5. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ je deliteľných aspoň jedným z čísel 2, 3 a 5?

Úloha 6. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ nie je deliteľných žiadnym z čísel 2, 3 a 7?

Úloha 7. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 5000\}$ nie je druhou ani treťou mocninou žiadneho prirodzeného čísla?

Úloha 8. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) obsahujú aspoň jednu z postupností $(1, 2, 3)$ alebo $(4, 5, 6)$ ako súvislú podpostupnosť?

Úloha 9. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, ani $(42, 44, 8, 55)$?

Úloha 10. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré obsahujú aspoň jednu z postupností $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ alebo $(7, 8, 9)$ ako súvislú podpostupnosť?

Úloha 11. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, $(47, 17, 57)$ ani $(42, 44, 8, 100)$?

Úloha 12. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré neobsahujú súvislú podpostupnosť $(62, 19, 31)$, $(100, 1, 8)$, ani $(42, 44, 8, 55)$?

Úloha 13. Vyriešte úlohy 8 až 12 pre prípad, že uvažované podpostupnosti nemusia byť súvislé.

Úloha 14. Máme tri jednoeurové mince, štyri dvojeurové mince a päť trojeurových mincí. Koľkými spôsobmi z nich možno vybrať desať mincí?

Úloha 15. Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22.$$

Koľko existuje celočíselných riešení tejto rovnice takých, že platí $0 \leq x_1 \leq 7$, $0 \leq x_2 \leq 11$, $0 \leq x_3 \leq 5$ a $0 \leq x_4 \leq 8$?

Úloha 16. Uvažujme rovnicu
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22.$$
Koľko existuje celočíselných riešení tejto rovnice takých, že platí $2 \leq x_1 \leq 7$, $-1 \leq x_2 \leq 8$, $0 \leq x_3 \leq 5$ a $-2 \leq x_4 \leq 9$?

Úloha 17. Koľko prešmyčiek neobsahujúcich tri rovnaké písmená za sebou je možné vytvoriť zo slova `ANTANANARIVO`?

Úloha 18. Koľko existuje všetkých *dismutácií*[1] množiny $\{1, \ldots, 100\}$? Výsledok môže obsahovať sumu.

Úloha 19. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \ldots, 100\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) neobsahujú súvislú podpostupnosť $(i, i+1)$ pre $i \in \{1, \ldots, 99\}$? Výsledok môže obsahovať sumu.

Úloha 20. Koľko existuje $2n$-prvkových postupností, ktoré

- každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ obsahujú práve dvakrát a zároveň
- obsahujú aspoň na jednom mieste dve rovnaké čísla vedľa seba?

Úloha 21. Koľkými spôsobmi možno v kine posadiť n manželských párov do poslednej rady, kde je $2n$ miest, tak, aby žiaden manželský pár nesedel vedľa seba?

Výsledky

1.

2.

3.

4. $\left\lfloor \frac{5000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{6} \right\rfloor = 483$

5. $\left\lfloor \frac{5000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{30} \right\rfloor = 3666$

6. $5000 - \left\lfloor \frac{5000}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{14} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{42} \right\rfloor = 1429$

7. $5000 - \lfloor \sqrt{5000} \rfloor - \lfloor \sqrt[3]{5000} \rfloor + \lfloor \sqrt[6]{5000} \rfloor = 5000 - 70 - 17 + 4 = 4917$

8. $2 \cdot 98! - 96!$

9. $100! - 98! - 97! + 95!$

10. $3 \cdot 98! - 3 \cdot 96! + 94!$

11. $100! - 2 \cdot 98! - 97! + 96! + 2 \cdot 95! - 93!$

[1] Pod *dismutáciou* rozumieme permutáciu, ktorá nemá žiaden pevný pod; pod pevným bodom zobrazenia f rozumieme x také, že $f(x) = x$.

12. $100! - 98! - 98! - 97! + 96! + 95! + 0 - 0,$

13. Úloha 8: $2 \cdot \dfrac{100!}{3!} - \dfrac{100!}{3! \cdot 3!}$
Úloha 9: $100! - \dfrac{100!}{3!} - \dfrac{100!}{4!} + \dfrac{100!}{3! \cdot 4!}$
Úloha 10: $3 \cdot \dfrac{100!}{3!} - 3 \cdot \dfrac{100!}{3! \cdot 3!} + \dfrac{100!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}$
Úloha 11: $2 \cdot \dfrac{100!}{3!} + \dfrac{100!}{4!} - \dfrac{100!}{3! \cdot 3!} - 2 \cdot \dfrac{100!}{3! \cdot 4!} + \dfrac{100!}{3! \cdot 3! \cdot 4!}$
Úloha 12: $100! - 2 \cdot \dfrac{100!}{3!} - \dfrac{100!}{4!} + \dfrac{100!}{3! \cdot 3!} + \dfrac{100!}{3! \cdot 4!} + \dfrac{100!}{6!}\binom{4}{2} - \dfrac{100!}{3! \cdot 6!}\binom{4}{2} = \dfrac{2}{3} \cdot 100!$

14. $C'(3,10) - C'(3,6) - C'(3,5) - C'(3,4) + C'(3,1) + C'(3,0) + 0 - 0 =$
$= \binom{12}{10} - \binom{8}{6} - \binom{7}{5} - \binom{6}{3} + \binom{3}{1} + 1 = 6$

15. $C'(4,22) - C'(4,14) - C'(4,10) - C'(4,16) - C'(4,13) + C'(4,2) + C'(4,8) + C'(4,5) + C'(4,4) + C'(4,1) + C'(4,7) =$
$= \binom{25}{3} - \binom{17}{3} - \binom{13}{3} - \binom{19}{3} - \binom{16}{3} + \binom{5}{3} + \binom{11}{3} + \binom{8}{3} + \binom{7}{3} + \binom{4}{3} + \binom{10}{3} = 195$

16. 112

17. $\dfrac{12!}{4! \cdot 3!} - 10 \cdot \dfrac{9!}{4!} - (\dfrac{9!}{3!} + 9 \cdot 8 \cdot \dfrac{8!}{3!}) + (7! + 7 \cdot 6 \cdot 6!) = 2\,666\,160$

18.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(2n-k)}{2^{n-k}}$$

19.