Cvičenie 12: Grafy I

Základné pojmy

Definícia 1. *Graf* je dvojica $G = (V, E)$, kde V je neprázdna konečná množina a

$$E \subseteq \binom{V}{2}.$$

Prvky množiny V nazývame *vrcholmi*, prvky množiny E nazývame *hranami*.

Ak v grafe $G = (V, E)$ pre nejaké (nie nutne rôzne) vrcholy $u, v \in V$ a hranu $e \in E$ platí $e = \{u, v\}$, hovoríme, že *hrana e je incidentná s vrcholmi u a v*. Pod *rádom grafu* rozumieme počet prvkov množiny V.

Uvedená terminológia nie je úplne ustálená a môže sa od zdroja k zdroju líšiť. Takto definovaný pojem „graf" sa napríklad často označuje ako jednoduchý graf; niektoré hrany pripúšťajú násobné / paralelné hrany (multigrafy), slučky vo vrcholoch alebo orientované hrany.

Definícia 2. Nech $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Graf G je *k-regulárny*, ak pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) = k$. Graf G je regulárny, ak je k-regulárny pre nejaké k.

→ **Úloha 1.** Dokážte, že v každom jednoduchom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú aspoň dva vrcholy s rovnakým stupňom.

→ **Úloha 2.** Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre každú dvojicu susedných vrcholov u, v platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$. Dokážte, že G musí byť nutne súvislý.

→ **Úloha 3.** Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?

→ **Úloha 4.** Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

b) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

c) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj ťah začínajúci v u a končiaci vo v.

d) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

e) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

→ **Úloha 5.** Nech $G = (V, E)$ je graf taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq 2$. Dokážte, že graf G musí nutne obsahovať kružnicu.

Úloha 6. Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$.

Úloha 7. Dokážte, že ak graf $G = (V, E)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

Úloha 8. Nech $n, k \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$, ktoré majú práve k hrán.

→ **Úloha 9.** Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k-regulárny jednoduchý graf rádu n.

Úloha 10. Nájdite všetky navzájom neizomorfné 3-regulárne grafy rádu 6.

Úloha 11. Pre každé z nasledujúcich tvrdení dokážte alebo vyvráťte jeho platnosť pre všetky $n \geq 1$:

a) Kompletný graf K_n je regulárny.

b) Každý podgraf grafu K_n je regulárny.

c) Každý indukovaný podgraf grafu K_n je regulárny.

Úloha 12. Dokážte alebo vyvráťte: každý indukovaný podgraf regulárneho grafu je regulárny.

Úloha 13. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.

Úloha 14. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.

→ **Úloha 15.** Dokážte, že každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$ a kružnicu dĺžky aspoň $\delta(G) + 1$ (pre $\delta(G) \geq 2$), kde $\delta(G)$ je najmenší stupeň grafu.

Úloha 16. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n-1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.

Úloha 17. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.

→ **Úloha 18.** Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý. (Komplementárny graf grafu G je taký graf G', pre ktorý platí $V(G') = V(G)$ a $E(G') = \binom{V}{2} - E(G)$.)

Úloha 19. Dokážte, že

a) pre každý jednoduchý graf o n vrcholoch, e hraných a k komponentoch platí $n - k \leq e \leq (n-k+1)(n-k)/2$ a

b) pre všetky l také, že $n - k \leq l \leq (n-k+1)(n-k)/2$ existuje graf o n komponentoch, l hranách a k komponentoch.

Stromy

Definícia 3. Graf $G = (V, E)$ je *acyklický*, ak neobsahuje žiadnu kružnicu. *Strom* je ľubovoľný súvislý acyklický graf.

Veta 1. *Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(*i*) *G je strom.*

(*ii*) *Ľubovoľné dva vrcholy grafu G sú spojené práve jednou cestou.*

(*iii*) *Graf G je súvislý a po odobraní ľubovoľnej hrany vznikne z grafu G nesúvislý graf. (G je minimálne súvislý)*

(*iv*) *Graf G je acyklický a po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne kružnica. (G je maximálne acyklický)*

(*v*) *G je súvislý graf rádu $n \in \mathbb{N}$ s $n - 1$ hranami.*

Definícia 4. Nech $T = (V, E)$ je strom. *List* je ľubovoľný vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 1$.

→ **Úloha 20.** Dokážte vetu 1.

→ **Úloha 21.** O strome T vieme, že má

- 4 vrcholy stupňa 2,
- 2 vrcholy stupňa 3,
- 7 vrcholov stupňa 4,
- maximálny stupeň 4.

Koľko môže mať strom T listov?

Úloha 22. Nájdite všetky stromy $T = (V, E)$ obsahujúce vrchol $v \in V$ taký, že $\deg_T(v) = 0$.

Úloha 23. Koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom na n vrcholoch?

Úloha 24. Dokážte, že každý strom T má aspoň $\Delta(T)$ listov.

Úloha 25. Nájdite všetky regulárne stromy.

→ **Úloha 26.** Dokážte, že vrcholy stromu možno očíslovať v_1, v_2, …, v_n tak, že pre každé $i \geq 2$ má vrchol v_i práve jedného suseda v množine $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$.

Bipartitiné grafy

Úloha 27. Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Úloha 28. Dokážte, že každý regulárny bipartitný graf musí mať párny počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

→ **Úloha 29.** Nech G je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

→ **Úloha 30.** Nech G je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľnú hranu, tak ostane súvislý.

→ **Úloha 31.** Nájdite chybu v nasledujúcom dôkaze

> **Tvrdenie.** Každý graf G, pre ktorý platí $\delta(G) \geq 2$, obsahuje kružnicu dĺžky tri.
>
> *Dôkaz.* Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa počtu vrcholov grafu G, ktorý označíme n. Graf G musí mať aspoň 3 vrcholy, vtedy ide o K_3, ktorý je sám o sebe trvorený kružnicou dĺžky 3. Tým máme dokázanú bázu.
>
> Teraz predpokladajme, že pre nejaké n každý graf G, ktorý má n vrcholov a $\delta(G) \geq 2$ obsahuje kružnicu dĺžky 3. Keď pridáme do grafu G nový vrchol s dvomi susedmi, tak dostaneme graf G', ktorý má $n+1$ vrcholov. Graf G' stále obsahuje kružnicu dĺžky 3 – tú, ktorá bola v grafe G. Tým máme tvrdenie dokázané pre grafy s $n+1$ vrcholmi a náš dôkaz je tým hotový. □

Riešenia

1. Graf rádu n nemôže mať vrchol stupňa 0 a aj $n-1$.

2. Podobne ako predchádzajúca úloha.

3. Spojnica najdlhších ciest ich rozdelí každú na dva úseky. Zoberte dlhšie z nich. Hranu nemusia mať spoločnú.

4. a) Áno – zoberte si najkratší u-v-sled, ktorý nie je cestou a nájdite kratší
b) Áno, je to dôsledok a)
c) Áno, je to dôsledok a).
d) Nie – Napr. ťah u, x, u.
e) Nie – Napr. sled u, x, u.

6. $2^{n(n-1)/2}$

7. Nájdite v ňom kružnicu. Ak má párnu dĺžku, tak využite vo zvyšku sledu indukčný predpoklad.

8. $\binom{n(n-1)/2}{k}$

9. Musí platiť $n > k$ a ak n je nepárne, tak k musí byť párne.

10. $K_{3,3}$ a K_4, kde sme jeden vrchol nahradili trojuholníkom.

11. a) áno, b) nie, c) nie

12. Neplatí.

13. Ak by ležal na viacerých, tak vrchol, v ktorom sa kružnice rozpoja, má veľký stupeň.

14. Grafy, v ktorých každý komponent je buď C_3, alebo hviezda – graf, kde je jeden vrchol spojený s hranou s ďalšími i vrcholmi (a žiadne iné hrany neobsahuje), $i \geq 0$

15.

16. Každé dva nesusedné vrcholy majú spoločného susesda.

17. $(n-1)(n-2)/2$: ak má jeden komponent veľkosť a, tak graf môže mať najviac $a(a-1)/2 + (n-a)(n-a-1)/2 = 2a^2 - 2an + n(n-1)/2$ hrán, čo nadobúda maximum pre $a = 1$ a $a = n-1$. Dosiahne sa na grafe $K_{n+1}+$ izolovaný vrchol.

18.

21. 18

22. 1-vrhcolový graf

23. Najmenej 2: cesta. Najviac $n-1$: hviezda.

24. Zoberte si vrchol najväčšieho stupňa a nájdite listy v podstromoch, ktoré sú naň zavesené

25. 1-vrcholový graf

28. Spočítame počet hrán a vyjde, že jeho partície musia byť rovnako veľké.

29.

30.

Riešenie úlohy a)

Ukážka dvoch spôsobov, ako spisovať dôkazy, kde opakujeme nejaký krko. Hlavná myšlienka je vyznačná modrou, spoločná pre obe riešenia.

Matematická indukcia

Nech u, v sú vrcholy grafu G. Matematickou indukciou podľa n dokážeme, ža ak v grafe G existuje u-v-sled dĺžky n, tak existuje v ňom aj u-v-cesta. Pre $n = 0$ tvrdenie zjavne platí (sled (u) je aj cestou).

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky $n < k$, pre nejaké $k > 0$. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre $n = k$. Nech teda $P = (u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = v)$ je u-v sled dĺžky k. Ak sa v ňom neopakujú vrcholy, tak ide o cestu a dôkaz je hotový. Predpokladajme teda, že sled P nie je cestou, teda že pre nejaké $i < j$ platí $v_i = v_j$. Potom $P' = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i = v_j, e_{j+1}, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ je u-v-sled dĺžky kratšej ako k. Preto podľa indukčného predpokladu existuje u-v-cesta v grafe G. Tým je dôkaz indukciou dokončený

Extremálny princíp

Nech u, v sú vrcholy grafu G a nech $P = (u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = v)$ je najkratší u-v-sled grafu G (ktorý existuje, keďže aspoň jeden u-v-sled v grafe G máme). Predpokladajme teda, že sled P nie je cestou, teda že pre nejaké $i < j$ platí $v_i = v_j$. Potom $P' = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i = v_j, e_{j+1}, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ je u-v-sled dĺžky kratšej ako k. To je v spore s tým, že P je najkratší u-v-sled. Preto P musí byť cesta.