Sada domácich úloh z UKTG č. 1

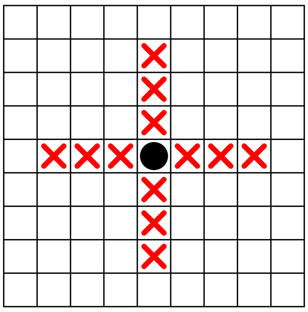
Termín: pondelok 15. 3. 2021, 23:59

Úloha 1. *(1 + 2 = 3 body)* Figúrka *miniveža* ohrozuje políčka, ktoré sa nachádzajú v rovnakom riadku alebo stĺpci ako ona sama a zároveň sú od nej vzdialené najviac tri políčka (pozri obrázok). Koľko najviac miniveží možno umiestniť na šachovnicu rozmerov

a) 8×8,

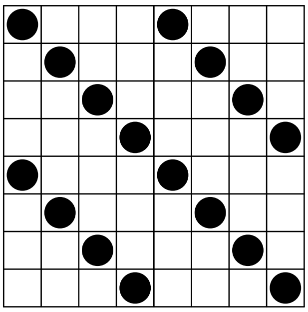
b) 9×9

tak, aby sa žiadne dve miniveže navzájom neohrozovali.

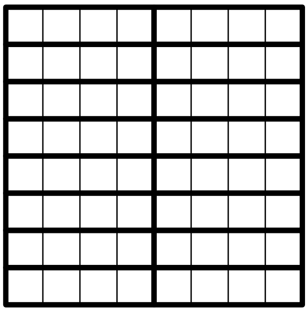


a) Ukážeme, že na šachovnicu 8×8 možno umiestniť najviac 16 miniveží. Obrázok 1a ukazuje, že naozaj možno rozmiestniť 16 miniveží tak, aby sa žiadne dve neohrozovali.

Teraz ukážeme, že viac ako 16 miniveží nemôžeme umiestniť. Predpokladajme, že máme na šachovncii rozmiestnených aspoň 17 miniveží. Rozdeľme si políčka šachovnice do 16 množín ako na obrázku 1b. Pre každú množinu platí, že ak do nej umiestnime dve veže, tak sa budú navzájom ohrozovať. Keďže veží máme viac ako množín, z Drichletovho princípu musí existoavť množina políčok, v ktorej sú umiestnené dve veže. Tieto dve veže sa ohrozujú, preto nie je možné umiestniť viac ako 16 miniveží.



(a)

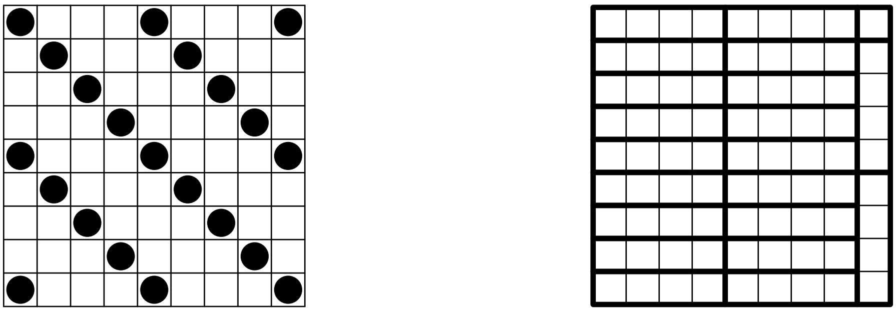


(b)

Obr. 1

b) Ukážeme, že na šachovnicu 9×9 možno umiestniť najviac 21 miniveží. Obrázok 2a ukazuje, že naozaj možno rozmiestniť 21 miniveží tak, aby sa žiadne dve neohrozovali.

Teraz ukážeme, že viac ako 21 miniveží nemôžeme umiestniť. Predpokladajme, že máme na šachovncii rozmiestnených aspoň 22 miniveží. Rozdeľme si políčka šachovnice do 21 množín ako na obrázku 2b. Pre každú množinu platí, že ak do nej umiestnime dve veže, tak sa budú navzájom ohrozovať. Keďže veží máme viac ako množín, z Drichletovho princípu musí existoavť množina políčok, v ktorej sú umiestnené dve veže. Tieto dve veže sa ohrozujú, preto nie je možné umiestniť viac ako 21 miniveží.



(a) (b)

Obr. 2

Úloha 2. *(1 + 1 + 1 = 3 body)* Určte, koľko existuje

a) 3- alebo 4-ciferných čísel, ktoré obsahujú len cifry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

b) 5-ciferných čísel, ktoré obsahujú len cifry 0, 2, 4, 5, 7, 9 a navyše sú deliteľné číslom 25;

c) 6-ciferných čísel, v ktorých cifra na prvom mieste je odlišná od všetkých ostatných cifier (v tejto úlohe už čísla môžu obsahovať ľubovoľné cifry).

Vaše tvrdenia formálne zdôvodnite. To by malo znamenať, že hľadanú množinu čísel zložíte z menších množín a pomocou tvrdení z prednášky zistíte počet jej prvkov.

Riešenie. V riešeniach budeme použitie pravidla súčtu označovať $(+)$ a použitie pravidla súčinu označovať $(\cdot)$.

a) Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Potom množinu čísel z podúlohy a) možno vyjadriť ako $A\times A\times A\cup A\times A\times A\times A$ a s využitím pravidla súčtu a súčinu počet jej prvkov je

$$|A \times A \times A \cup A \times A \times A \times A| \overset{(+)}{=} |A \times A \times A| + |A \times A \times A \times A| \overset{(\cdot)}{=} |A|^3 + |A|^4 = 7^3 + 7^4 = 2744.$$

b) Nech $B = \{0, 2, 4, 5, 7, 9\}$. Čísla z podúlohy b) budeme reprezentovať ako usporiadané 5-tice, ktoré na prvom mieste nemôžu mať cifru 0 (lebo máme 5-ciferné čísla) a ich posledné dvojčíslie musí byť 00, 25, 50 alebo 75 (kvôli deliteľnosti 25). Preto ich môžeme vyjadriť ako $(B - \{0\}) \times B \times B \times \{(0, 0), (2, 5), (5, 0), (7, 5)\}$, a teda ich počet je

$$|(B - \{0\}) \times B \times B \times \{(0, 0), (2, 5), (5, 0), (7, 5)\}| \overset{(\cdot)}{=} |B - \{0\}| \cdot |B| \cdot |B| \cdot |\{(0, 0), (2, 5), (5, 0), (7, 5)| =$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 720.$$

c) Nech $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$ a nech $M_i = (C - \{i\})^5 = (C - \{i\}) \times (C - \{i\}) \times (C - \{i\}) \times (C - \{i\}) \times (C - \{i\})$ pre $i \in C$. Teda M_i označuje množinu 5-ciferných čísel, v ktorých sa nevyskytuje cifra i. Podľa pravidla súčinu máme $|M_i| = |C - \{i\}|^5 = 9^5$. Množinu všetkých 6-ciferných čísel, kde sa prvá cifra líši od ostatných, vyjadríme rozdelením na viacero množín podľa prvej cifry:

$$\bigcup_{i=1}^{9} \{i\} \times M_i.$$

Počet jej prvkov teda vieme vyjadriť ako

$$\left|\bigcup_{i=1}^{9} \{i\} \times M_i\right| \overset{(+)}{=} \sum_{i=1}^{9} |\{i\} \times M_i| \overset{(\cdot)}{=} \sum_{i=1}^{9} 1 \cdot |M_i| = \sum_{i=1}^{9} 9^5 = 9^6.$$

Riešenie c) cez zovšeobecnené praidlo súčinu Nech $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Množinu všetkých 6-ciferných čísel, kde sa prvá cifra líši od ostatných, vyjadríme ako

$$M = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6);\ a_1 \in C - \{0\},\ a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in C - \{a_1\}\}.$$

Keďže $|C - \{0\}| = 9$ a pre každé a_1 platí $|C - \{a_1\}| = 9$, tak podľa zovšeobecneného pravidla súčinu platí $|M| = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^6$. □

Úloha 3. *(BONUS, 2 body)* Nech $n \in \mathbb{N}^+$ a M je n-prvková množina. Majme postupnosť $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ prvkov množiny M, ktorá spĺňa nasledovné vlastnosti:

(i) $a_i \neq a_{i+1}$ pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$;

(ii) nemožno vybrať štyri indexy b, c, d, $e \in \{1, 2, \ldots, k\}$ také, že $b < c < d < e$, $a_b = a_d \neq a_c = a_e$ (teda nejaké dve rôzne čísla x, y nenájdeme v konfigurácii x, y, x, y, nie nutne pri sebe).

Dokážte, že $k \leq 2n - 1$.

Riešenie. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n. Pre $n = 1$ postupnosť môže kvôli podmienke (i) obsahovať najviac jeden člen, teda $k \leq 1$.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie zo zadania platí pre každé $n \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Dokážeme, že potom tvrdenie platí aj pre $n = t + 1$. Nech $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je postupnosť prvkov nejakej $(t+1)$-prvkovej množiny M. Označme si $a_1 = x$ a nech $x_1 = a_1, x_2, \ldots, x_s$ sú všetky výskyty prvku x v postupnosti A. Postupnosť A si potom vieme zapísať ako

$$x_1, P_1, x_2, P_2, x_3 \ldots, x_{s-1}, P_{s-1}, x_s, P_s,$$

kde $P_1, P_2, \ldots, P_s$ sú postupnosti prvkov z množiny M. Pre $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ si označíme dĺžku postupnosti P_i ako k_i a počet jej rôznych prvkov ako n_i. Zjavne $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = k - s$.

Pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$ platí $k_i > 0$, a teda aj $n_i > 0$ (teda postupnosť P_i je neprázdna), lebo postupnosť A nemôže obsahovať dva prvky x vedľa seba. Taktiež sa nemôže stať, že by nejaké dve rôzne postupnosti P_i a P_j mali rovnaký prvok, lebo to by porušilo podmienku (ii) pre postupnosť A. Všetky postupnosti P_i preto obsahujú navzájom disjunktné prvky (navyše rôzne od x). Tým pádom platí $n_1 + n_2 + \cdots + n_s \leq t$.

Pre každú postupnosť P_i, kde $i \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$, vieme použiť indukčný predpoklad, čím dostaneme $k_i \leq 2n_i - 1$. Ak $n_s > 0$, tak z indukčného predpokladu pre postupnosť P_s dostávame $k_s \leq 2n_s - 1$. Ak $n_s = 0$, tak zjavne $k_s = 0$. V oboch prípadoch nám však platí $k_s \leq 2n_s$. Spojením týchto tvrdení dostávame

$$\begin{aligned} k = s + k_1 + k_2 + \cdots + k_{s-1} + k_s &\leq s + 2n_1 - 1 + 2n_2 - 1 + \cdots + 2n_{s-1} - 1 + 2n_s = \\ &= s + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_s) - (s-1) = 2t + 1. \end{aligned}$$

Teda $k \leq 2t + 1 = 2(t+1) - 1$, čo sme chceli dokázať. □