

Sada domácich úloh z UKTG č. 1

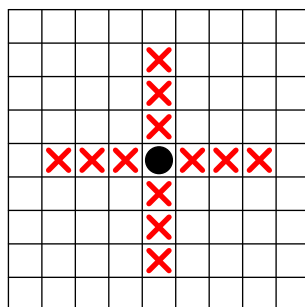
Termín: pondelok 15. 3. 2021, 23:59

Úloha 1. ($1 + 2 = 3$ body) Figúrka *miniveža* ohrozuje políčka, ktoré sa nachádzajú v rovnakom riadku alebo stĺpci ako ona sama a zároveň sú od nej vzdialené najviac tri políčka (pozri obrázok). Koľko najviac miniveží možno umiestniť na šachovnicu rozmerov

a) 8×8 ,

b) 9×9

tak, aby sa žiadne dve miniveže navzájom neohrozovali.



Úloha 2. ($1 + 1 + 1 = 3$ body) Určte, koľko existuje

a) 3- alebo 4-ciferných čísel, ktoré obsahujú len cifry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

b) 5-ciferných čísel, ktoré obsahujú len cifry 0, 2, 4, 5, 7, 9 a navyše sú deliteľné číslom 25;

c) 6-ciferných čísel, v ktorých cifra na prvom mieste je odlišná od všetkých ostatných cifier (v tejto úlohe už čísla môžu obsahovať ľubovoľné cifry).

Vaše tvrdenia formálne zdôvodnite. To by malo znamenať, že hľadanú množinu čísel zložíte z menších množín a pomocou tvrdení z prednášky zistíte počet jej prvkov.

Úloha 3. (*BONUS*, 2 body) Nech $n \in \mathbb{N}^+$ a M je n -prvková množina. Majme postupnosť (a_1, a_2, \dots, a_k) prvkov množiny M , ktorá spĺňa nasledovné vlastnosti:

(i) $a_i \neq a_{i+1}$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$;

(ii) nemožno vybrať štyri indexy $b, c, d, e \in \{1, 2, \dots, k\}$ také, že $b < c < d < e$, $a_b = a_d \neq a_c = a_e$ (teda nejaké dve rôzne čísla x, y nenájdeme v konfigurácii x, y, x, y , nie nutne pri sebe).

Dokážte, že $k \leq 2n - 1$.