Sada domácich úloh z UKTG č. 2

Termín: pondelok 12. 4. 2021, 23:59

V úlohách 1 a 2 vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite.

Úloha 1. *(0,2 + 0,8 + 1 + 1 + 1 = 4 body) Superdomino* má ma sebe dve rôzne čísla z množiny $C = \{1, 2, \dots, 20\}$. Presnejšie množinu všetkých superdomín definujeme ako množinu všetkých 2-prvkových podmnožín množiny C. Určte:

a) Koľko je všetkých superdomín.

b) Koľkými spôsobmi možno vybrať 5-prvkovú množinu superdomín, v ktorej každé superdomino obsahuje číslo 1.

c) Koľkými spôsobmi možno vybrať 4-prvkovú množinu superdomín, v ktorej aspoň jedno superdomino bude obsahovať číslo 1.

d) Koľkými spôsobmi možno vybrať 4-prvkovú množinu superdomín, v ktorej na nejakých dvoch dominách je rovnaké číslo x, zvyšné dve dominá majú spoločné číslo $y \neq x$ a žiadna iné dvojica rovnakách čísel sa na vyberaných dominách nenchádza. (Napr. $\{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}\}$)

e) Koľkými spôsobmi možno vybrať 5-prvkovú množinu superdomín, v ktorej na nejakých troch dominách je rovnaké číslo x, zvyšné dve dominá majú spoločné číslo $y \neq x$ a žiadna iné dvojica rovnakách čísel sa na vyberaných dominách nenchádza.

Riešenie.

a) $\binom{20}{2} = 190$. Priamo ide o kombinácie bez opakovania, teda počet 2-prvkových podmnožín 20-prvkovej množiny C.

b) $\binom{19}{5}$. Každý takýto výber je jednoznačne určený 5-prvkovou množinou čísel rôznych od jednotky.

c) Použijeme pravidlo rozdielu. Všetkých 4-prvkových podmnožín domín je $\binom{\binom{20}{2}}{4}$. Máme $\binom{19}{2}$ domín, čo neobsahujú jednotku. Preto 4-prvkových podmnožín, v ktorých vôbec nemáme jednotku je $\binom{\binom{19}{2}}{4}$. Preto tých zvyšných, teda tých, ktoré obsahujú aspoň jednu jednotku, je

$$\binom{\binom{20}{2}}{4} - \binom{\binom{19}{2}}{4} = \binom{190}{4} - \binom{171}{2} = 18\,212\,355.$$

d) Najprv vyberieme dvojicu čísel $\{x, y\}$, ktoré sa budú vyskytovať dvakrát v našej štvorici. To môžeme spraviť $\binom{20}{2}$ spôsobmi. Potom vyberieme pre prvé z týchto čísel (napr. to menšie) dvojicu čísel $\{a, b\}$, ktoré sa budú nachádzať na dvoch superdominách s číslom x. Tieto čísla musia byť rôzne od x aj y, preto máme $\binom{18}{2}$ možností na výber. Podobne zvolíme dvojicu čísel $\{c, d\}$, ktoré budú na superdominách s y. Volíme zo 16 čísel $(C - \{x, y, a, b\})$, teda máme $\binom{16}{2}$ možností. Spolu tak máme

$$\binom{20}{2}\binom{18}{2}\binom{16}{2} = 3\,488\,400$$

možností. Týmto našim výberom máme možnosť jednoznačne určenú. (Naša 4-ica domín vyzerá takto: $\{\{x, a\}, \{x, b\}, \{y, c\}, \{y, d\}\}$).

e) Najprv vyberieme číslo x, ktoré sa bude vyskytovať na dvoch dominách (20 spôsobov). Potom číslo y, ktoré sa bude vyskytovať na troch dominách (19 spôsobov). Pokračujeme výberom dvojice čísel $\{a, b\}$, ktoré budú na dvoch dominokockách s číslom x ($\binom{18}{2}$ možností) a na koniec vyberieme trojicu čísel $\{c, d, e\}$, ktoré budú na troch dominokockách s číslom y ($\binom{16}{3}$ možností). Spolu teda máme

$$20 \cdot 19 \cdot \binom{18}{2}\binom{16}{3} = 32\,558\,400$$

možností. (Naša 5-tica vyzerá takto: $\{\{x, a\}, \{x, b\}, \{y, c\}, \{y, d\}, \{y, e\}\}$.) □

Úloha 2. *(1 bod)* Koľko rôznych hodov môžeme hodiť 20 nerozlíšiteľnými hracími kockami?

Riešenie. Spomedzi čísel $, 2, 3, 4, 5, 6$ si vyberáme 20, ktoré nám padnú na kockách, pričom čísla sa môžu opakovať a nezáleží nám na poradí. Ide teda o kombinácie s opakovaním 20-tej triedy zo 6 prvkov. Preto máme

$$\binom{6 + 20 - 1}{20} = \binom{25}{20} = \binom{25}{5} = 53\,130 \qquad \text{možností.}$$

□

Úloha 3. *(2 body)* Vypočítajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{(k+1)(n-k+1)}\binom{n}{k}.$$

Riešenie.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{(k+1)(n-k+1)}\binom{n}{k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{(k+1)(n-k+1)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k \cdot n!}{(k+1)!(n-k+1)!} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!} = \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot \binom{n+2}{k+1} = \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{l=2}^{n+1} 3^{l-1} \cdot \binom{n+2}{l} = \\
&= \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \sum_{l=2}^{n+1} 3^{l} \cdot \binom{n+2}{l} = \\
&= \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \left(\sum_{l=0}^{n+2} 3^l \cdot \binom{n+2}{l} - \binom{n+2}{0} - 3 \cdot \binom{n+2}{1} - 3^{n+2}\binom{n+2}{n+2} \right) = \\
&= \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \left(4^{n+2} - 1 - 3(n+2) - 3^{n+2}\right) = \frac{4^{n+2} - 3^{n+2} - 3n - 7}{3(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

□

Úloha 4. *(BONUS, 2 body)* Koľko existuje n-prvkocých postupností čísel $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ takých, že súčet každej 9-prvkovej súvislej podpostupnosti je deliteľný 9-timi? Teda takých postupností $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, pre ktoré platí

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n-8\})(9 \mid a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+8}).$$

Vaše tvrdenie formálne dokážte.

Poznámka. Nájsť jednoduchú množinovú reprezentáciu týchto postupností nie je náročné, dajte si však záležať na dôkaze, že ide o tú istú vec. Za argumentami typu „a tak ďalej“ sa väčšinou skrýva odfláknutá matematická indukcia. Preto sa podobným argumentom vyhýbajte a spravte ich poriadne.

Riešenie. Označme M_n množinu všetkých n-prvkových postupností, v ktorej každá súvislá 9-prvková podpostupnosť má súčet prvkov deliteľný deviatimi. Pre $n \leq 8$ kvnatifikujeme cez prázdnu množinu. Takú podmienku spĺňajú všetky n-prvkové postupnosti, ktorých je $|M_n| = |\{1, 2, \ldots, 9\}^n| = 9^n$. Ďalej ukážeme matematickou indukciou, že pre všetky celé čísla $n \geq 8$ je počet hľadaných n-prvkových postupností je $|M_n| = 9^8$. Bázu pre $n = 8$ už máme overenú.

Predpokladejme teraz, že pre nejaké prirodzené číslo $k \geq 8$ platí $|M_k| = 9^8$. Poďme zistiť, koľko je $|M_{k+1}|$. Postupnosť dĺžky $k+1$ možno dostať tak, že najprv vyberieme postupnosť $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in M_k$. Ukážeme, že pre každú takúto voľbu možno vybrať $(k+1)$-vý člen a_{k+1} práve jedným spôsobom. Keďže $k \geq 8$, tak $(a_{k-7}, \ldots, a_k, a_{k+1})$ je 9-členná súvislá podpostupnosť postupnosti $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$, preto súčet jej prvkov musí byť deliteľný deviatimi. Máme teda[1]

$$\begin{aligned} a_{k+7} + \cdots + a_k + a_{k+1} &\equiv 0 \pmod 9, \\ a_{k+1} &\equiv -a_{k+7} - \ldots - a_k \pmod 9. \end{aligned}$$

Teda člen a_{k+1} musí dávať po delení deviatimi rovnaký zvyšok ako číslo $-a_{k+7} - \ldots - a_k$. Keďže však $a_{k+1} \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, kde máme každý zvyšok po delení deviatimi práve raz, tak a_{k+1} je svojím zvyškom po delení deviatimi jednoznačne určené (teda ho môžeme vybrať jedným spôsobom). Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu tak platí $|M_{k+1}| = |M_k| \cdot 1 = 9^8$. Tým je dôkaz ukončený. $\square$

Úloha 5. *BONUS, 2 body* Vieme, že pre $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \in \mathbb{N}} x^k.$$

Určte, ako vyzerá Taylorov rozvoj funkcie (teda zapíšte ju ako nekonečný mnohočlen)

$$\frac{1}{(1-x)^n}.$$

Hoci sa to na prvý pohľad nezdá, naozaj ide o úlohu z kombinatoriky, ktorá sa dá pekne kombinatoricky vyriešiť.

Riešenie. S využitím rozvoja pre $1/(1-x)$ vieme zapísať

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k \right)^n = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^n.$$

Na tento výraz sa pozrieme ako na n zátvoriek, ktoré roznásobíme. Určime, aký koeficient dostaneme pri člene x^k. Tento koeficient je rovný počtu spôsobov, ako môžeme zo zátvoriek postupne vybrať mocniny x tak, aby nám ich súčin dal x^k. Teda chceme pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vybrať z i-tej zátvorky x^{a_i}, pričom musí platiť

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k.$$

To vypočítame ako počet spôsobov, ako zoradiť do radu k symbolov x a $n-1$ oddeľovačov $|$. V každom takom zoradení nám oddeľovače $|$ rozdelia x-ká na n súvislých úsekov s dĺžkami a_1, a_2, …, a_n, čím dostávame jedoznančnú korešpondenciu medzi takýmito zoradeniami a spôsobmi, ako dostať pri roznásobovaní x^k. Takéto zoradnie je jednoznačne určené pozíciami symbolov x, ktoré možno vybrať $\binom{n+k-1}{k}$ spôsobmi. Preto toto je aj počet spôsobov, ako dostať pri roznásobovaní x^k. Teda po celom roznásobení dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

$\square$

[1] Pripomínam, že zápis $a \equiv b \pmod 9$ znamená, že čísla a a b dávajú rovnaký zvyšok po delení deviatimi.