

Sada domácich úloh z UKTG č. 2

Termín: pondelok 12. 4. 2021, 23:59

V úlohách 1 a 2 vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite.

Úloha 1. ($0,2 + 0,8 + 1 + 1 + 1 = 4$ body) Superdomino má ma sebe dve rôzne čísla z množiny $C = \{1, 2, \dots, 20\}$. Presnejšie množinu všetkých superdomín definujeme ako množinu všetkých 2-prvkových podmnožín množiny C . Určte:

- Koľko je všetkých superdomín.
- Koľkými spôsobmi možno vybrať 5-prvkovú množinu superdomín, v ktorej každé superdomino obsahuje číslo 1.
- Koľkými spôsobmi možno vybrať 4-prvkovú množinu superdomín, v ktorej aspoň jedno superdomino bude obsahovať číslo 1.
- Koľkými spôsobmi možno vybrať 4-prvkovú množinu superdomín, v ktorej na nejakých dvoch dominách je rovnaké číslo x , zvyšné dve dominá majú spoločné číslo $y \neq x$ a žiadna iné dvojica rovnakých čísel sa na vybraných dominách nenachádza. (Např. $\{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}\}$)
- Koľkými spôsobmi možno vybrať 5-prvkovú množinu superdomín, v ktorej na nejakých troch dominách je rovnaké číslo x , zvyšné dve dominá majú spoločné číslo $y \neq x$ a žiadna iné dvojica rovnakých čísel sa na vybraných dominách nenachádza.

Úloha 2. (1 bod) Koľko rôznych hodov môžeme hodiť 20 nerozlišiteľnými hracími kockami?

Úloha 3. (2 body) Vypočítajte sumu

$$\sum_{k=1}^n \frac{3^k}{(k+1)(n-k+1)} \binom{n}{k}.$$

Úloha 4. (BONUS, 2 body) Koľko existuje n -prvkových postupností čísel $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ takých, že súčet každej 9-prvkovej súvislej podpostupnosti je deliteľný 9-timi? Teda takých postupností (a_1, a_2, \dots, a_n) , pre ktoré platí

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n-8\})(9 \mid a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+8}).$$

Vaše tvrdenie formálne dokážte.

Poznámka. Nájsť jednoduchú množinovou reprezentáciu týchto postupností nie je náročné, dajte si však záležať na dôkaze, že ide o tú istú vec. Za argumentami typu „a tak ďalej“ sa väčšinou skrýva odfláknutá matematická indukcia. Preto sa podobným argumentom vyhýbajte a spravte ich poriadne.

Úloha 5. BONUS, 2 body Vieme, že pre $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \in \mathbb{N}} x^k.$$

Určte, ako vyzerá Taylorov rozvoj funkcie (teda zapíšte ju ako nekonečný mnohočlen)

$$\frac{1}{(1-x)^n}.$$

Hoci sa to na prvý pohľad nezdá, naozaj ide o úlohu z kombinatoriky, ktorá sa dá