Sada domácich úloh z UKTG č. 3

Termín: pondelok 10. 5. 2021, 23:59

Úloha 1. *(3 body)* Určte, koľko existuje usporiadaných n-tích celých čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $0 \leq x_i \leq 47$, a navyše platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k.$$

Výsledok môžete uviesť v tvare jednej sumy.

Riešenie. Nech pre fixné n, k je M množina všetkých riešení rovnice $x_1 + x_2 + \dots x_n = k$ v obore prirodzených čísel. Nech pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je M_i množina tých riešení z M, pre ktoré platí $x_i \geq 48$. Počet riešení rovnice so zadania je $|M_1' \cap M_2' \cap \cdots \cap M_n'|$. Podľa princípu zapojenia a vypojenia tento počet vypočítame ako

$$|M_1' \cap M_2' \cap \cdots \cap M_n'| = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_l}|.$$

Množina $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_l}$ obsahuje tie riešenia z M, pre ktoré platí $x_a \geq 48$ pre všetky $a \in \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$, teda ide o také riešenie, kde nejakých l fixných premenných je zaručene aspoň 48 (avšak nie nutne sú to jediné také). Poďme určiť ich počet. Najskôr nastavme $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$ na hodnotu 48. Tým sme z celkového súčtu premenných zobrali hodnotu $48l$, a teda nám ostala hodnota $k - 48l$, ktorú potrebujeme prerozdeliť medzi n neznámych. V každom z $k - 48l$ krokov si zvolíme jednu neznámu, ktorú zvýšime o 1. Pri voľbách neznámych nám nezáleží na poradí a vybrané neznáme sa aj môžu opakovať. Ide teda o kombinácie s opakovaním triedy $k - 48l$ z n prvkov, ktorých počet je

$$|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_l}| = \binom{n + k - 48l - 1}{n - 1}.$$

V prípade, že $k - 48l < 0$, tak máme 0 možností, čomu aj zodpovedá naše kombinačné číslo. Preto

$$\begin{aligned} |M_1' \cap M_2' \cap \cdots \cap M_n'| &= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_l}| = \\ &= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n} \binom{n + k - 48l - 1}{n - 1} = \\ &= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \binom{n + k - 48l - 1}{n - 1}, \end{aligned}$$

čo je teda hľadaný počet riešení rovnice. □

Úloha 2. *(2 body)* Nech

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}.$$

Rozhodnite, či platí

a) $f(n) = O(\sqrt{n})$,

b) $f(n) = \Theta(n^a)$ pre nejakú reálnu konštantu a – ak áno, nájdite jednu takú konštantu (nemusíte riešiť, či ich existuje viac).

Všetky vaše tvrdenia formálne dokážte. Vychádzajte pri tom len z definícií.

Riešenie. Skôr, ako začneme riešiť jednotlivé podúlohy, uvedomme si, že pre všetky $n \geq 0$ platí

$$\frac{n}{2}\sqrt{\frac{n}{2}} \leq \sum_{k \geq n/2} \sqrt{\frac{n}{2}} \leq \sum_{k \geq n/2} \sqrt{k} \leq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{k} \sqrt{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n} = n\sqrt{n},$$

teda máme odhad

$$\frac{n}{2}\sqrt{\frac{n}{2}} \leq f(n) \leq n\sqrt{n}. \tag{1}$$

a) Ukážeme, že $f(n) \neq O(\sqrt{n})$. Pre spor predpokladajme, že pre každé $c \in \mathbb{R}^+$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ platí pre všetky $n \geq n_0$ nerovnosť

$$f(n) \leq c\sqrt{n}.$$

S využitím nerovnosti (1) máme

$$\frac{n}{2}\sqrt{\frac{n}{2}} \leq f(n) \leq c\sqrt{n}, \qquad \text{teda} \qquad \frac{n}{2}\sqrt{\frac{n}{2}} \leq c\sqrt{n},$$

čo je ekvivalentné s

$$\frac{n}{2\sqrt{2}} \leq c.$$

Táto nerovnosť však neplatí pre žiadne $n > c \cdot 2\sqrt{c}$, čo je spor s tým, že má platiť pre všetky n väčšie rovné ako nejaké n_0.

b) Vďaka nerovnosti (1) platí $f(n) \leq 1 \cdot n\sqrt{n}$ pre všetky $n \geq 0$. Preto $f(n) = O(n\sqrt{n})$. Taktiež vďaka (1) platí $n\sqrt{n} \leq 2\sqrt{2} \cdot f(n)$ pre všetky $n \geq 0$. Preto $f(n) = \Omega(n\sqrt{n})$. Tým sme ukázali, že $f(n) = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$.

$\square$

Úloha 3. *(2 body)* Dokážte, že vrcholy každého grafu G, ktorého minimálny stupeň je aspoň 1, možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý vrchol má suseda v druhej skupine ako je on sám.

Riešenie matematickou indukciou. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa počtu vrcholov grafu G, ktorý si označíme n. Keďže $\delta(G) \geq 1$, tak $n \geq 2$. Ak $n = 2$, tak graf má len dva vrcholy spojené hranou. Každý vrchol dáme do jednej skupiny, čím dostaneme vyhovujúce rozdelenie.

Predpokladajme teraz, že každý graf G s najviac n vrcholmi a $\delta(G) \geq 1$ možno rozdeliť podľa zadania. Nech H je graf, ktorý má $n+1$ vrcholov a $\delta(H) \geq 1$. Nech v je vrchol grafu G s minimálnym stupňom. Ak graf $H - v$ (ktorý má n vrcholov) má minimálny stupeň aspoň 1, tak preto podľa indukčného predpokladu možno rozdeliť jeho vrcholy do dvoch skupín tak, aby každý jeho vrchol mal suseda v inej ako jeho skupine. Vrchol v má v grafe $H - v$ aspoň jedného suseda u. Na základe toho vrchol v dáme do inej skupiny, ako v ktorej je vrchol u. Tým zaručíme, že aj vrchol v má suseda v inej skupine ako je on sám.

Nech teda graf $H - v$ má minimálny stupeň 0. Odstránením vrchola v z grafu H sme z každého vrchola odstránili najviac jednu hranu, preto $\delta(H) = 1$. Nech teda v grafe $H - v$ sa nachádza vrchol u stupňa 0. Keďže vrchol u mal v grafe H stupeň aspoň 1, musel byť spojený hranou práve s vrcholom v. A keďže v má stupeň 1, tak v grafe $H - v$ je vrchol u jediný, ktorý má stupeň 0. Preto graf $H - \{v, u\}$ má minimálny stupeň aspoň 1 a $n - 1 \leq n$ vrcholov, a teda podľa indukčného predpokladu možno jeho vrcholy požadovane rozdeliť. Vrcholy u, v rozdelíme ako v prípade $n = 2$. Takto dostávame opäť vyhovujúce rozdelenie vrcholov na dve skupiny.

Ukázali sme, že v oboch prípadoch vieme rozdeliť vrcholy grafu H a tým je dôkaz indukciou ukončený. $\square$

Riešenie cez kostru. Tvrdenie nám stačí ukázať pre súvislé grafy, nakoľko nám potom stačí použiť tento výsledok na každý komponent súvislosti grafu G. Predpokladajme teda, že graf G je súvislý. Potom G obsahuje kostru K. Keďže kostra je strom, tak ide o bipartitný graf s partíciami A, B. Keďže kostra je súvislá, každý vrchol kostry K, a teda aj grafu G má suseda v kostre K. Keďže K je bipartitný graf, tak sa tento sused nachádza v inej partícii. Preto je rozdelenie vrcholov $\{A, B\}$ vyhovujúce. $\square$

Úloha 4. *(BONUS, 2 body)* Koľko existuje postupností dĺžky n z malých písmen anglickej abecedy, ktoré neobsahujú *uktg* ako súvislú podpostupnosť?

Riešenie. Pre $i \in \{1, 2, \ldots, n-3\}$ označme M_i množinu postupností malých písmen anglickej abecedy, v ktorých sa na i-tej pozícii začína súvislá podpostupnosť *uktg*. Chceme vypočítať $|M_1' \cap M_2' \cap \cdots \cap M_{n-3}'|$, čo podľa princípu inklúzie a exklúzie vypočítame ako

$$|M_1' \cap M_2' \cap \cdots \cap M_{n-3}'| = \sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n-3} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}|.$$

Množina $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}$ obsahuje práve tie postupnosti, v ktorých sa *uktg* začína na pozíciách i_1, i_2, …, i_k. V prípade, že niektoré dve i-čka sú vzdialené menej ako 4, teda platí $i_j \geq i_{j+1} - 3$ pre nejaké $j \in \{1, 2, \ldots, n-4\}$, tak také postupnosti neexistujú. Preto môžeme tieto nulové členy vyhodiť a sumovať tak len cez tie indexy $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, pre ktoré platí

$$1 \leq i_1, \quad i_1 < i_2 - 3, \quad i_2 < i_3 - 3, \quad \ldots, \quad i_{k-1} < i_k - 3, \quad i_k \leq n - 3, \tag{2}$$

teda

$$1 \leq i_1 < i_2 - 3 < i_3 - 6 < \cdots < i_k - 3k + 3 \leq n - 3k.$$

Použitím substitúcie $j_a = i_a - 3(a-1)$ tak môžeme ekvivalentne sumovať pomocou indexov

$$1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < \cdots < j_k \leq n - 3k.$$

Preto počet spôsobov, ako vybrať indexy i tak, aby spĺňali (2) je $\binom{n-3k}{k}$. Pri takomto výbere indexov platí $|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}| = 26^{n-4k}$, lebo každý z k výskytov postpnosti *uktg* nám určuje písmená na 4 pozíciách, teda nám ostáva určiť písmená na zvyšných $n - 4k$ pozíciách. Preto si môžeme našu sumu zjednodušiť

$$\begin{aligned}
|M'_1 \cap M'_2 \cap \cdots \cap M'_{n-3}| &= \sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 - 3 < i_3 - 6 < \cdots < i_k - 3k + 3 \leq n - 3k} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}| = \\
&= \sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 - 3 < i_3 - 6 < \cdots < i_k - 3k + 3 \leq n - 3k} 26^{n-4k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-3} (-1)^k \binom{n-3k}{k} 26^{n-4k}.
\end{aligned}$$

□

Úloha 5. *(BONUS,, 2 body)* Nech G je graf s n vrcholmi a minimálnym stupňom aspoň $2n/3$. Dokážte, že graf G obsahuje kružnicu prechádzajúcu cez všetky vrcholy.

Riešenie. Najskôr ukážeme, že graf G obsahuje kružnicu dĺžky aspoň $2n/3 + 1$. Nech $P = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ je najdlhšia cesta grafu G. Vrchol v_0 má $d \geq 2n/3$ sudov, ktorí sa musia všetci nachádzať na ceste P (inak by to nebola najdlhšia cesta). Sused vrchola v_0, ktorý sa nachádza na ceste P najďalej od v_0 je vrchol v_l, kde $l \geq d$. Graf G teda obsahuje kružnicu $v_0, v_1, \ldots, v_d$ dĺžky $d + 1 \geq 2n/3 + 1$.

Teraz ukážeme, že v G nájdeme aj kružnicu cez všetky vrcholy. Nech C je najdlhšia kružnica grafu G, ktorá má dĺžku k. Podľa predošlého odseku je jej dĺžka aspoň $2n/3 + 1$. Pre spor teraz predpokladajme, že nejaký vrchol v sa na tejto kružnici nenachádza.

Vrchol v má stupeň aspoň $2n/3$. Z toho mimo kružnice má najviac $n - k - 1$ susedov. Preto je na kružnici C aspoň $2n/3 - n + k + 1 = k + 1 - n/3$ vrcholov, ktoré sú susedné z vrcholom v. Vrcholy kružnice C možno rozdeliť na $\lceil k/2 \rceil \leq (k+1)/2$ množín, z ktorých každá obsahuje dva susedné vrcholy, resp. v prípade že k je neprárne, tak jedna z nich obsahuje jeden vrchol. Keďže platí

$$\begin{aligned}
k + 1 - n/3 &> \frac{k+1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 2k + 2 - 2n/3 &> k + 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow k > 2n/3 - 1,
\end{aligned}$$

tak v má na kružnici C viac susedov, ako máme na nej množín vrcholov. Preto podľa Dirichletovho princípu v má na kružnici nejakých dvoch susedov x, y, ktorí sú susední na kružnici C. Preto ak z kružnice C odstránime hranu xy a pridáme hrany xv a vy, tak dostaneme kružnicu grafu G, ktorá má $k + 1$. A to je spor s tým, že kružnica C bola najdlhšia kružnica grafu G. Preto najdlhšia kružnica grafu G musí obsahovať všetky vrcholy. □