

## Sada domácich úloh z UKTG č. 3

Termín: pondelok 10. 5. 2021, 23:59

**Úloha 1.** (3 body) Určte, koľko existuje usporiadaných  $n$ -tíc celých čísel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , kde pre každé  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $0 \leq x_i \leq 47$ , a navyše platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k.$$

Výsledok môžete uviesť v tvare jednej sumy.

**Úloha 2.** (2 body) Nech

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \sqrt{k}.$$

Rozhodnite, či platí

- $f(n) = O(\sqrt{n})$ ,
- $f(n) = \Theta(n^a)$  pre nejakú reálnu konštantu  $a$  – ak áno, nájdite jednu takú konštantu (nemusíte riešiť, či ich existuje viac).

Všetky vaše tvrdenia formálne dokážte. Vychádzajte pri tom len z definícií.

**Úloha 3.** (2 body) Dokážte, že vrcholy každého grafu  $G$ , ktorého minimálny stupeň je aspoň 1, možno rozdeliť na dve skupiny tak, že každý vrchol má suseda v druhej skupine ako je on sám.

**Úloha 4.** (BONUS, 2 body) Koľko existuje postupností dĺžky  $n$  z malých písmen anglickej abecedy, ktoré neobsahujú *uktg* ako súvislú podpostupnosť?

**Úloha 5.** (BONUS, 2 body) Nech  $G$  je graf s  $n$  vrcholmi a minimálnym stupňom aspoň  $2n/3$ . Dokážte, že graf  $G$  obsahuje kružnicu prechádzajúcu cez všetky vrcholy.