Cvičenie 1: Matematická indukcia

Základná forma matematickej indukcie

Princíp matematickej indukcie: nech $X \subseteq \mathbb{N}$ je množina prirodzených čísel taká, že:

(*i*) $0 \in X$.

(*ii*) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak $n \in X$, tak $n + 1 \in X$.

Potom $X = \mathbb{N}$.

V prípade, že máme danú postupnosť výrokov $(V(n))_{n\in\mathbb{N}}$, môžeme za X zvoliť množinu tých $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré je výrok $V(n)$ pravdivý. Ako priamy dôsledok princípu matematickej indukcie tak dostávame nasledujúcu vetu:

Veta 1. *Nech $(V(n))_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť výrokov taká, že*

(*i*) *Výrok $V(0)$ je pravdivý.*

(*ii*) *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n + 1)$.*

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Tvrdenie (*i*) predchádzajúcej vety sa nazýva *báza indukcie* a tvrdenie (*ii*) sa nazýva *indukčný krok.*

Princíp matematickej indukcie nemožno dokázať – ide o jednu z tzv. *Peanových axióm*, ktorá je ale ekvivalentná inému pomerne očividnému tvrdeniu, tzv. *vlastnosti dobrého usporiadania množiny* $\mathbb{N}$ (viď nižšie). Je teda možné chápať princíp matematickej indukcie ako axiómu a vlastnosť dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ ako dôsledok tejto axiómy, alebo naopak.

Často sa stáva, že tvrdenie platí (alebo dáva zmysel) iba pre prirodzené čísla n väčšie alebo rovné ako nejaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Pomocou princípu matematickej indukcie ale možno ľahko dokázať platnosť nasledujúceho variantu vety 1:

Veta 2. *Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n\geq n_0}$ je postupnosť výrokov taká, že*

(*i*) *Výrok $V(n_0)$ je pravdivý.*

(*ii*) *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n + 1)$.*

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

→ **Úloha 1.** Dokážte vetu 2 (s použitím princípu matematickej indukcie).

→ **Úloha 2.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $3 \mid n^3 + 2n$.

Úloha 3. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $5 \mid n^5 - n$.

Úloha 4 (Malá Fermatova veta)**.** (*) Dokážte, že pre všetky prvočísla p a všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $p \mid n^p - n$.

→ **Úloha 5.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}^+$ platí $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$.

Úloha 6. (*) Dokážte, že pre všetky n, $k \in \mathbb{N}$ platí $n^2 + n + 1 \mid n^{k+2} + (n + 1)^{2k+1}$.

→ **Úloha 7.** Nech $A \subseteq \mathbb{N}$ je ľubovoľná konečná množina prirodzených čísel, pre ktorú platí $|A| = n$. Označme

$$S(A) = \{x + y \mid x \in A;\ y \in A\}.$$

Dokážte, že $|S(A)| \geq 2n - 1$.

Úloha 8. (*) Nech $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sú ľubovoľné konečné množiny prirodzených čísel také, že $|A| = m \geq 1$ a $|B| = n \geq 1$. Označme

$$A + B = \{a + b \mid a \in A;\ b \in B\}.$$

Dokážte, že potom

$$|A + B| \geq m + n - 1$$

a ukážte, že tento dolný odhad je tesný[1] pre všetky $m, n \geq 1$.

Úloha 9. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Úloha 10 (Nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom)**.** (*) Dokážte, že pre ľubovoľných n nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Silná matematická indukcia

Pri dôkaze indukčného kroku sa pri „bežnej“ matematickej indukcii (podľa vety 1 resp. vety 2) odvodzuje platnosť výroku $V(n+1)$ len na základe predpokladu platnosti výroku $V(n)$ – tento predpoklad nazývame *indukčným predpokladom.* Formálne sa teda nemožno odvolávať na platnosť výrokov $V(j)$ pre $j < n$; indukčným predpokladom je iba platnosť výroku $V(n)$.

Ľahko možno nahliadnuť, že ide o umelé a čisto formálne obmedzenie. Ak totiž v báze indukcie dokážeme platnosť výroku $V(n_0)$ a následne dokážeme indukčný krok pre $n = n_0, \ldots, k-1$, ľahko vidieť, že sú pravdivé *všetky* výroky $V(n_0), V(n_0+1), \ldots, V(k)$. Pri dôkaze indukčného kroku pre $n = k$ sa teda môžeme odvolávať aj na platnosť výrokov $V(j)$ pre $n_0 \leq j < k$: ľahko možno dokázať, že záver vety 2 – čiže pravdivosť výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ – bude aj v tomto prípade zaručený. Túto myšlienku možno sformalizovať nasledovne:

Veta 3. *Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$ je postupnosť výrokov taká, že*

(i) Výrok $V(n_0)$ je pravdivý.

(ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$ platí: ak sú pravdivé výroky $V(n_0), V(n_0+1), \ldots, V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n+1)$.

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

Veta 3 sa niekedy nazýva *princípom úplnej matematickej indukcie*, prípadne *princípom silnej matematickej indukcie.*

Veta 4. *Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$. Nech pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$, platí implikácia:*

Ak je výrok $V(k)$ pravdivý pre každé $k \in \mathbb{N}$ menšie ako n, tak je pravdivý aj výrok $V(n)$.

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

V tejto súvislosti treba upozorniť na skutočnosť, že predovšetkým vo filozofickej logike sa niekedy používa pojem úplnej indukcie vo vzťahu k tzv. neúplnej indukcii; tá v matematike nemá miesto, no často sa používa v empirických vedách (z 1000 neúspešných pokusov o prerazenie hlavy múrom napríklad môže empirická veda trochu neuvážene usúdiť, že to nie je možné; o matematický dôkaz ale nejde). Podľa tejto terminológie je matematická indukcia *vždy* úplná, hoci nejde o úplnú matematickú indukciu v zmysle zavedenom vyššie.

[1] K ľubovoľnej dvojici prirodzených čísel $m, n \geq 1$ teda existujú konečné množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ také, že $|A| = m$, $|B| = n$ a $|A + B| = n + m - 1$.

Úloha 11. Dokážte vetu 3 (s použitím vety 2).
Nápoveda: nech $V'(n) := V(n_0) \wedge V(n_0 + 1) \wedge \ldots \wedge V(n)$, potom...

→ **Úloha 12.** Dokážte, že každé prirodzené číslo $n \geq 2$ možno rozložiť na súčin prvočísel.

→ **Úloha 13.** Pod *rozlomením* obdĺžnikovej tabuľky čokolády rozumieme jej rozdelenie (pozdĺž priamky, ktorá prechádza hranami medzi štvorčekmi) na dve obdĺžnikové tabuľky, ktoré dohromady obsahujú rovnaký počet štvorčekov ako pôvodná tabuľka. Dokážte, že každú obdĺžnikovú tabuľku čokolády o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ štvorčekoch možno rozdeliť na jednotlivé štvorčeky pomocou $n-1$ rozlomení.

Úloha 14. (*) Dokážte predošlé tvrdenie bez použitia matematickej indukcie

Úloha 15. Z teórie čísel vieme, že pre všetky celé čísla a, b platí $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b-a, a)$ (tvrdenie nemusíte dokazovať). Dokážte, že pre všetky celé čísla a, b platí $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b \bmod a, a)$

→ **Úloha 16.** Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b existujú celé čísla k, l také, že

$$\mathrm{NSD}(a, b) = ka + lb.$$

Nápoveda. Môžete využiť, že $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(a, a \mod b)$.

> Pri použití úplnej matematickej indukcie je často nutné dokázať „viacero báz indukcie“. Ide najmä o tie situácie, kde sa v dôkaze indukčného kroku odvolávame na platnosť aspoň jedného výroku $V(n-j)$ pre $j \geq 1$. Takýto dôkaz indukčného kroku je vo všeobecnosti neprípustný pre n také, že $n - j < n_0$ (kde n_0 má význam z vety 3), pretože o $V(n-j)$ v takom prípade vo všeobecnosti nevieme vôbec nič (dokonca ani to, či takýto výrok dáva zmysel). Preto treba „malé hodnoty“ čísla n ošetriť osobitne. Čitateľ by iste dokázal upraviť vetu 3 tak, aby brala na zreteľ aj tento prípad.

Úloha 17. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 3a + 5b$.

Úloha 18. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 4a + 5b$.

Úloha 19. Dokážte tvrdenia z predchádzajúcich dvoch úloh bez použitia úplnej matematickej indukcie.

> *Fibonacciho čísla* sú definované nasledujúcim rekurentným predpisom:
>
> $$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \qquad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$
>
> V nasledujúcom budeme používať označenia
>
> $$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{a} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
>
> Číslo φ sa zvykne nazývať *zlatý rez.*

Úloha 20. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \psi^n\right).$$

Úloha 21. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ platí

$$\varphi^n = \varphi F_n + F_{n-1}.$$

Úloha 22. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

Úloha 23. Dokážte:

a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}.$$

b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

Úloha 24. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

Úloha 25. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ako nerobiť indukciu

Úloha 26. Nájdite chybu v „dôkazoch“ nasledovných „viet“.

> **„Veta“ 5.** Pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$ platí $a = b$.
>
> *„Dôkaz“.* Matematickou indukciou vzhľadom na $M := \max\{a, b\}$.
>
> 1° Pre $M = 0$ nutne $a = b = 0$ a tvrdenie platí.
>
> 2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $M = k$. Ukážeme, že platí aj pre $M = k + 1$.
> Nech $a, b \in \mathbb{N}$ sú čísla také, že $\max\{a, b\} = k + 1$. Potom $\max\{a - 1, b - 1\} = k$. Z indukčného predpokladu teda vyplýva, že platí $a - 1 = b - 1$, a teda aj $a = b$. □

Indukcia a dobre usporiadané množiny

> Hovoríme, že lineárne usporiadaná množina $(X, <)$ je *dobre usporiadaná*, ak každá neprázdna množina $A \subseteq X$ má v usporiadaní $<$ najmenší prvok. Množina $\mathbb{N}$ je dobre usporiadaná – ide o jednu z jej kľúčových vlastností, ktorá je ekvivalentná princípu matematickej indukcie (a teda môže byť považovaná za jednu z axióm Peanovej aritmetiky práve namiesto princípu matematickej indukcie).
>
> V prípade, že sa pomocou matematickej indukcie dá dokázať pravdivosť nejakého výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, je možné rovnaké tvrdenie dokázať aj s použitím princípu dobrého usporiadania. Stačí za účelom sporu predpokladať, že množina $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \ \wedge \ \neg V(n)\}$ je neprázdna. V takom prípade má táto množina najmenší prvok m. Zostáva dokázať, že:
>
> (*i*) Nemôže platiť $m = n_0$ – to je zrejme ekvivalentné dôkazu pravdivosti výroku $V(n_0)$, a teda báze matematickej indukcie.
>
> (*ii*) Ak $m > n_0$, tak nutne $m - 1 \in A$, čo je spor s minimalitou m. Tu sa v skutočnosti dokazuje iba implikácia „ak $\neg V(m)$, tak $\neg V(m-1)$“, čo je obmena implikácie „ak $V(m-1)$, tak $V(m)$“. Keďže $m > n_0$, môžeme zaviesť premennú $n := m - 1$, čím konečne dostávame implikáciu „ak $V(n)$, tak $V(n+1)$“ z indukčného kroku.
>
> Na dôkaz s využitím vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ sa teda možno dívať ako na „matematickú indukciu sporom“.

Úloha 27. Z princípu matematickej indukcie odvoďte vlastnosť dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$.

Úloha 28. Z vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ odvoďte princíp matematickej indukcie.

> V nasledujúcej úlohe možno použiť napríklad indukciu vzhľadom na n, pričom báza tejto indukcie sa dokáže ďalšou indukciou, tentokrát vzhľadom na k. Alternatívne možno tvrdenie dokazovať indukciou vzhľadom na k a bázu dokázať indukciou vzhľadom na n.

Úloha 29. Uvažujme zobrazenie $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dané nasledovne:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 2, \\ f(n+1,k) &= f(n,k) + 2(n+k+2), \qquad &\forall n,k \in \mathbb{N}, \\ f(n,k+1) &= f(n,k) + 2(n+k+1), \qquad &\forall n,k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$f(n,k) = (n+k+2)^2 - n - 3k - 2.$$