Cvičenie 3:
Opakovanie stredoškolskej kombinatoriky

Táto sada úloh slúži ako čiastočná náhrada za odpadnuté 3. cvičenie. Tieto úlohy by mal vedieť vyriešiť absolvent gymnázia. Pokiaľ máte s nimi problémy, ozvite sa (cez Teamsy, mailom). Môžeme sa dohodnúť na konzultácii, príp. aj náhrade odpadnutého cvičenia, kde by sme si tieto veci zopakovali. Na 4. cvičení budeme riešiť náročnejšie úlohy, preto je potrebné, aby ste si tieto jednoduchšie pripomenuli.

Po vyriešení úloh nám, prosíme, zanechajte spätnú väzbu vo formulári:
`https://forms.office.com/r/pnCJEnyPnj`.
Podľa odpovedí uvážime, čo si zopakovať na začiatku 4. cvičení.

Úloha 1. Hádžeme troma hracími kockami rôznych farieb. Koľko môže padnúť rôznych trojíc čísel?

Úloha 2. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel zložených z cifier $0, 1, 2, 4, 7, 8$.

Úloha 3. Nájdite počet všetkých čísel zložených z cifier $0, 1, 2, 4, 7, 8$, ktoré majú aspoň tri cifry a najviac päť cifier.

Úloha 4. Nájdite počet všetkých čísel zložených z cifier $0, 1, 2, 4, 7, 8$, ktoré majú aspoň tri cifry, najviac päť cifier a rovnaké posledné dve cifry.

Úloha 5. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b?

Úloha 6. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry rôzne.

Úloha 7. Pod grúňom je 10 salašov a na každom majú 50 (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

Úloha 8. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel.

Úloha 9. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa nekončia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 10. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú každé z písmen aspoň raz?

Úlohy navyše

Nasledovné úlohy sú pre prípad, ak potrebujte viac precvičovania. Šikovnejších môžu zaujať úlohy 24 až 26 o počte deliteľov, ktorých riešenie obsahuje peknú myšlienku.

Úloha 11. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?

Úloha 12. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa buď začínajú na a, alebo sa súčasne nezačínajú na a a končia na c?

Úloha 13. Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$?

Úloha 14. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?

Úloha 15. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa končia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 16. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú práve jeden výskyt písmena c?

Úloha 17. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých párnych n-ciferných čísel.

Úloha 18. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel deliteľných číslom 4.

Úloha 19. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel deliteľných číslom 5.

Úloha 20. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré neobsahujú práve jeden výskyt písmena c?

Úloha 21. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 4.

Úloha 22. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 5.

Úloha 23. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré obsahujú aspoň jednu z cifier $\{1, 3, 7\}$.

Úloha 24. Nájdite počet kladných deliteľov čísla 120.

Úloha 25. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^8$.

Úloha 26. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6$.

Riešenia

1. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

2. $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$

3. $5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^4 = 7400$

4. $5 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^3 = 1290$

5. $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 108$

6. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

7. 50^{10}

8. $9 \cdot 10^{n-1}$

9. $4^n - 4^{n-2}$

10. $4 \cdot (6 \cdot 10) = 240$

11. $2 \cdot 4^4 = 512$

12. $4^4 + 3 \cdot 4^3 = 448$

13. 4^n

14. $2 \cdot 4^{n-1}$

15. $4^{n-3} \cdot 4 = 4^{n-2}$

16. $n \cdot 3^{n-1}$

17. $9 \cdot 10^{n-2} \cdot 5$ pre $n \geq 2$, pre $n = 1$ je to 5

18. $9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ ($n \geq 3$)

19. $9 \cdot 10^{n-2} \cdot 2$ ($n \geq 2$)

20. $4^n - n \cdot 3^{n-1}$

21. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ (pre $n \geq 3$)

22. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-2} \cdot 2$ (pre $n \geq 2$)

23. $9 \cdot 10^{n-1} - 6 \cdot 7^{n-1}$

24. $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

25. $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 810$

26. $13 \cdot 7 \cdot 7$ deliteľov ($3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6 = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 7^6$)