Cvičenie 12: Grafy III – bipartitné a eulerovské grafy

Eulerovské grafy

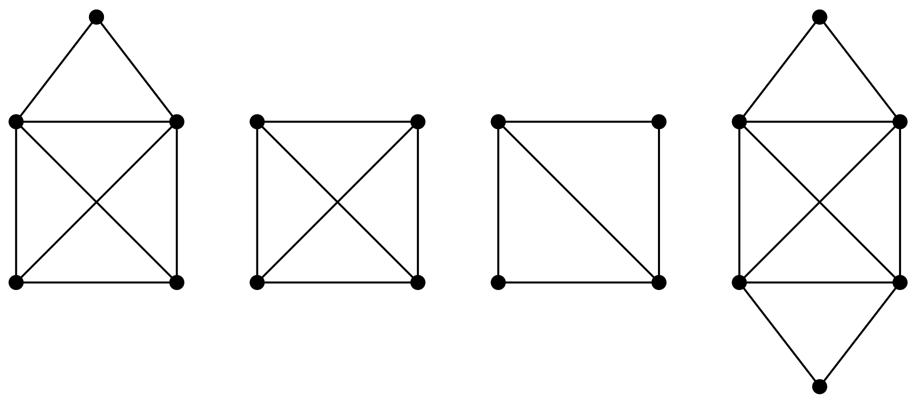
Definícia 1. Súvislý graf $G = (V, E)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany (*eulerovský ťah*).

Veta 1. *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. Graf G je eulerovský práve vtedy, keď sú stupne všetkých jeho vrcholov párne.*

Veta 2. *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. V grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany práve vtedy, keď v grafe G existujú práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

Definícia 2. *Hranový graf* $L(G)$ grafu G je graf, ktorého vrcholmi sú hrany grafu G a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď hrany, ktoré sú reprezentované vrcholmi $L(G)$, majú spoločný vrchol.

Úloha 1. Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



Úloha 2. Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

Úloha 3. Dokážte vetu 2.

Úloha 4. Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf K_n je eulerovský.

Úloha 5. Dokážte alebo vyvráťte masledujúce implikácie:

1. Graf G je eulerovský $\Rightarrow$ hranový graf $L(G)$ je eulerovský.
2. Hranový graf $L(G)$ je eulerovský $\Rightarrow$ graf G je eulerovský.

Úloha 6. Dokážte, že bipartitiný hamiltonovský graf má obe partície rovnakej veľkosti.

Úloha 7. Keď chceme povedať, že premenné a, b, c majú navzájom rôzne hondoty, tak na to často používame zápis $a \neq b \neq c \neq a$. Zápis $a \neq b \neq c$ nestačí, lebo relácia $\neq$ nie je tranzitívna a nevyplýva z neho, že $a \neq c$. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré vieme zapísať, že n premenných je navzájom rôznych, s využitím $\binom{n}{2}$ symbolov $\neq$ (pre $n = 3$ teda máme vyššie príklad vyhovujúceho zápisu).

Úloha 8. Nech $M = \{1, 2, \ldots, 17\}$. Dokážte, že existuje postupnosť prvkov množiny $\binom{M}{5}$, v ktorej sa každá dvojca navzájom disjunktných 5-prvkových podmnožín množiny M nachádza práve raz vedľa seba.

Úloha 9. Hypotéza o dvojitom pokrytí kružnicami hovorí, že pre každý graf G, ktorý neobsahuje most, existuje množina kružníc multimnožina $\mathcal{K}$ taká, že každá hrana grafu G sa nachádza práve v dvoch kružniciach z $\mathcal{K}$. Dokážte, že táto hypotéza platí pre eulerovské grafy. (*Most* je taká hrana grafu, ktorej odstránením sa zvýši počet komponentov.)

Planárne grafy

Definícia 3. Súvislý graf $G = (V, E)$ je *planárny*, ak sa dá nakresliť do roviny bez kríženia hrán.

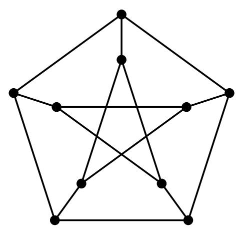
Definícia 4. Nech súvislý graf $G = (V, E)$ je nakreslený do roviny (*rovinný graf*). Oblasť rovinného grafu G je plocha ohraničená hranami grafu G. *Veľkosť oblasti* je dĺžka najkratšieho uzavretého sledu obsahujúceho hrany ohraničujúce oblasť.

Veta 3 (Eulerova formula)**.** *Nech $G = (V, E)$ je súvislý rovinný graf a nech F je množina jeho oblastí. Potom platí*

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Úloha 10. Nájdite planárny graf, ktorý má dve rôzne nakreslenia. To znamená, že sa dá nakresliť dvomi rôznymi spôsomi tak, že veľkosti oblastí jedného nakreslenia sú iné ako veľkosti oblastí druhého nakreslenia.

Úloha 11. Dokážte, že Petersnov graf nie je planárny.



Úloha 12. Dokážte, že kompletný bipartitný graf $K_{2,n}$ je planárny pre všetky n. Aký môže mať počet oblastí?

Úloha 13. Dokážte, že každý planárny graf má vrchol stupňa najviac 5.

Úloha 14. Nájdite všetky platónske telesá. Sú to súvislé rovinné grafy, pre ktoré platí, že všetky ich oblasti majú rovnakú veľkosť a všetky vrcholy majú rovnaký stupeň.

Bipartitné grafy

Úloha 15. Nech $n, m \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých bipartitných grafov na množine vrcholov $V = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$, ktorých partie sú dané množinami vrcholov $V_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

Úloha 16. Dokážte, že každý regulárny bipartitný graf musí mať párny počet vrcholov. Nájdite vhodné zosilnenie tohto tvrdenia.

→ **Úloha 17.** Nech G je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

→ **Úloha 18.** Nech G je súvislý 3-regulárny bipartitný graf. Dokážte, že ak z neho odstránime ľubovoľnú hranu, tak ostane súvislý.

Riešenia

11. Obsahuje subdivíziu K_5 alebo aj $K_{3,3}$.

12. n vrcholov dajte do stredu medzi dva vrcholy. Má vždy n oblastí.

13. Sporom. Mal by priveľa hrán.

14. `https://sk.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3nske_teleso` + podľa tejto definície aj kružnice.

16. Spočítame počet hrán a vyjde, že jeho partície musia byť rovnako veľké.

17.

18.