Sada domácich úloh z UKTG č. 1

Termín: štvrtok 10. 3. 2022, 23:59

Úloha 1. *(3 body)* Máme daný konvexný n-uholník, kde n je celé číslo a $n \geq 3$. Pomocou niekoľkých priamok ho rozdelíme na samé trojuholníky. Dokážte, že po tomto procese dostaneme určite aspoň $n-2$ trojuholníkov.

Poznámka. Mnohouholník M je *konvexný*, ak pre každú dvojicu bodov X, Y (či už z obvodu alebo z vnútra) mnohouholník M obsahuje celú úsečku XY. Ekvivalentne sa dá povedať, že mnohouholník je konvexný, ak všetky jeho vnútorné uhly sú menšie ako $180°$.

Riešenie. Skôr než sa pustíme do dôkazu, tak si uvedomme, že ak z každého n-uholníka dostaneme aspoň $n-2$ trojuholníkov, tak aj z každého k-uholníka pre $k > n$ musíme dostať aspoň $n-2$ trojuholníkov. Je tomu tak prelo, lebo každý n uholník možno brať ako špeciálny prípad k-uholníka, kde niektoré jeho vrcholy ležia na priamke. Uvažovanie takýchto degenerovaných k-uholníkov nám dôkaz neovplyvní.

Tvrdenie zo zadania dokážeme úplnou matematickou indukciou. Pre $n = 3$ rozdeľujeme trojuholník a zjavne po ľubovoľnom rozdelení dostaneme aspoň $1 = n - 2$ trojuholník.

Predpokladajme, že pre každé celé k, kde $3 \leq k < n$, platí: Ak rozdelíme konvexný k-uholník priamkami na trojuholníky, tak dostaneme aspoň $k-2$ trojuholníkov. Uvažujme teraz ľubovoľný konvexný n-uholník a ľubovľné jeho rozdelenie priamkami na trojuholníky. Vyberme si jednu priamku. Tá ho vďaka konvexnosti rozdelí na a-uholník a b-uholník (oba opäť konvexné) pre nejaké celé čísla $a, b \geq 3$. Spočítaním vrcholov vzniknutých mnohouholníkov započítame isto každý vrchol n-uholníka a dva spoločné vrcholy a- a b-uholníka započítame dvakrát. Preto $a + b \geq n + 2$. Ak $a < n$ aj $b < n$, tak z indukčného predpokladu vyplýva, že po rozdelení a-uholníka nám musí vzniknúť aspoň $a - 2$ trojuholníkov a z b-uholníka aspoň $b - 2$ trojuholníkov. Spolu tak dostávame aspoň

$$a - 2 + b - 2 = a + b - 4 \geq n + 2 - 4 = n - 2 \qquad \text{trojuholníkov,}$$

čo sme mali dokázať.

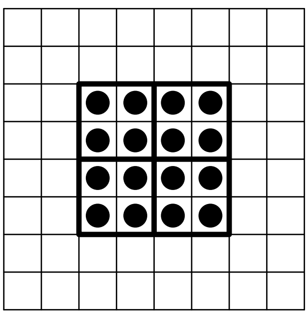
Čo ak neplatí $a < n \wedge b < n$? Bez ujmy na všeobecnosti nech $a \geq n$. Potom z a-uholníka musí vzniknúť aspoň toľko trojuholníkov ako z $(n-1)$-uholníka, čo je z indukčného predpokladu aspoň $n - 3$. Z b-uholníka musí vzniknúť aspoň jeden. Dostávame tak, že rozhodne musíme dostať aspoň $n - 3 + 1 = n - 2$ trojuholníkov. Tým je indukčný krok dokázaný. □

Úloha 2. *(3 body)* Nájdite najmenšie číslo n, pre ktoré platí nasledovné tvrdenie: Z ľubovoľného rozmiestnenia n kráľov na šachovnici 8×8 možno vybrať piatich, z ktorých sa žiadni dvaja neohrozujú. Správnosť vášho tvrdenia dokážte.

Poznámka. Dvaja králi sa ohrozujú, ak sa nachádzajú na políčkach, ktoré majú spoločný vrchol alebo stranu.

Riešenie. Ukážeme, že najmenšie hľadané n je 17.

Ak je $n = 16$, tak umiestnime 16 kráľov do štvorca 4×4. Ten možno rozdeliť na štyri štvorce 2×2 (obrázok 1). Ak vyberieme zo 16 kráľov ľubovoľných päť, tak z Dirichletovho princípu budú v jednom štvorci 2×2 aspoň dvaja a tí sa zjavne ohrozujú. Preto zo 16 kráľov, a zjavne aj hocijakého menšieho počtu kráľov, nevieme vybrať päť neohrozujúcich sa.



Obr. 1

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

Obr. 2

Teraz uvažujme ľubovoľné rozmiestnenie 17 kráľov. Políčka šachovnice rozdelíme na 4 množiny podľa obrázka 2. Ľahko overíme, že králi na políčkach z rovnakej množiny sa navzájom neohrozujú. Keďže $17/4 > 4$, z frekvenčnej formy Dirichletovho princípu vyplýva, že v niektorej množine sa nachádzajú aspoň piati králi, a tí sa navzájom neohrozujú.

Formálne riešenie druhej časti *To isté riešenie možno prepísať o niečo viac formálne nasledovných spôsobom.* Nech A je ľubovoľná množina 17 políčok, na ktorých stoja králi. Pod políčkom myslíme usporiadanú dvojicu $(r, s) \in \{0, 1, \dots, 7\} \times \{0, 1, \dots, 7\}$, kde r označuje riadok a s stĺpec (na obrázku 2 číslujeme riadku zhora nadol a stĺpce zľava doprava). Uvažujem zobrazenie $f\colon A \to \{1, 2, 3, 4\}$, ktoré každému políčku priradí prvok z $\{1, 2, 3, 4\}$ ako je určené na obrázku 2. Keďže $17/4 > 4$, z frekvenčnej formy Dirichletovho princípu vyplýva, že existuje číslo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, ktoré sa zobrazí aspoň 5 políčok množiny A. Ľahko overíme, že králi na políčkach z množiny $f^{-1}(\{i\})$ (teda tých, ktoré sa zobrazia na i) sa navzájom neohrozujú.

Poznámka. Zobrazenie f s predošlého odesku má predpis

$$f((r, s)) = r \bmod 2 + 2 \cdot (s \bmod 2) + 1.$$

□

Úloha 3. *(BONUS, 2 body)* Na salaši sa pasie 100 oviec. Vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu a za n dní ich zje všetky. Určte najmenšiu hodnotu n, pre ktorú zaručenie existuje súvislý úsek dní, kedy vlk zje presne 20 oviec. (Aj jeden deň považujeme za súvislý úsek dní.)

Riešenie. Úlohu si najskôr preformulujeme. Nech $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je postupnosť, kde a_i je počet oviec, ktoré zjedol vlk v i-ty deň. Definujeme postupnosť $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, kde

$$s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i, \qquad \text{pre } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Špeciálne z toho máme, že $s_0 = 0$, nakoľko ide o prázdny súčet, a vďaka podmienke zo zadania $s_n = 100$. Keďže vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu, postupnosť $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ je rastúca. Zjavne, pre $0 \le i < j \le n$, súvislá podpostupnosť $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$ má súčet 20 práve vtedy, keď $s_j - s_i = 20$. Teda chceme nájsť najmenšie také n, pre ktoré v postupnosti $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ existujú dva členy s rozdielom 20. Ukážeme, že hľadaným najmenším n je $n = 60$.

Rozdeľme si čísla $\{0, 1, 2, \dots, 100\}$, teda možné hodnoty členov postupnosti $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, na 60 množín:

- $\{x, x + 20\}$ pre $x \in \{0, 1, \dots, 19\}$ (20 množín),
- $\{x, x + 20\}$ pre $x \in \{40, 41, \dots, 59\}$ (20 množín),
- $\{80, 100\}$ (1 množina),
- $\{x\}$ pre $x \in \{81, 82, \dots, 99\}$ (19 množín).

Ak je $n \ge 60$, tak má postupnosť $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ aspoň 61 členov. Keďže je to viac ako množín, tak z Dirichletovho princípu musí existovať jedna množina, ktorá obsahuje členy s_i a s_j $(0 \le i < j \le n)$, pre ktoré teda z definície našich množín platí $s_j - s_i = 20$, čo sme chceli ukázať. (Všimnite si, že postupnosť s-iek obsahuje o 1 člen viac, ako máme počet dní, keďže sme zahrnuli do nej aj súčet pred prvým dňom.)

Pre $n = 59$ vieme vybrať postupnosť

$$(s_0, s_1, \dots, s_{59}) = (0, 1, 2, \dots, 19, 40, 41, 42, \dots, 59, 81, 82, \dots, 100),$$

ktorá neobsahuje dve čísla s rozdielom 20: v rámci podpostupností $(0, 1, 2, \dots, 19)$; $(40, 41, 42, \dots, 59)$ a $(81, 82, \dots, 100)$ vieme dostať rozdiel najviac 19 a rozdiely čísel z dvoch pospostupností sú aspoň 21. Taktiež, pre $n < 59$ dostaneme protipríklad vynechaním členov okrem prvého a posledného. Teda pre $n < 60$ existuje postupnosť $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, ktoré neobsahuje dva členy s rozdielom 20.

Poznámka. Naše rozdelenie na množiny vyzerá nasledovne:

□

$\{0, 20\}$	$\{40, 60\}$	$\{80, 100\}$
$\{1, 21\}$	$\{41, 61\}$	$\{81\}$
$\{2, 22\}$	$\{42, 62\}$	$\{82\}$
$\{3, 23\}$	$\{43, 63\}$	$\{83\}$
$\{4, 24\}$	$\{44, 64\}$	$\{84\}$
$\{5, 25\}$	$\{45, 65\}$	$\{85\}$
$\{6, 26\}$	$\{46, 66\}$	$\{86\}$
$\{7, 27\}$	$\{47, 67\}$	$\{87\}$
$\{8, 28\}$	$\{48, 68\}$	$\{88\}$
$\{9, 29\}$	$\{49, 69\}$	$\{89\}$
$\{10, 30\}$	$\{50, 70\}$	$\{90\}$
$\{11, 31\}$	$\{51, 71\}$	$\{91\}$
$\{12, 32\}$	$\{52, 72\}$	$\{92\}$
$\{13, 33\}$	$\{53, 73\}$	$\{93\}$
$\{14, 34\}$	$\{54, 74\}$	$\{94\}$
$\{15, 35\}$	$\{55, 75\}$	$\{95\}$
$\{16, 36\}$	$\{56, 76\}$	$\{96\}$
$\{17, 37\}$	$\{57, 77\}$	$\{97\}$
$\{18, 38\}$	$\{58, 78\}$	$\{98\}$
$\{19, 39\}$	$\{59, 79\}$	$\{99\}$