Sada domácich úloh z UKTG č. 2

Termín: štvrtok 31. 3. 2022, 23:59

Úloha 1. *(1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 bodov)* Hodiny telesnej výchovy sa účastní 28 (rozlíšiteľných) žiakov: 14 dievčat a 14 chlapcov.

a) Počas futbalového zápasu padlo 7 gólov. Koľko je možností, ako mohli žiaci streliť góly, ak Uršuľa, Karol, Terka a Gustáv strelili v tomto poradí štyri za sebou idúce góly? (Pritom nám záleží na poradí a jeden žiak mohol streliť aj viac gólov.)

b) V kabinete sú dresy s číslami od 1 po 99, každý práve raz. Koľkými spôsobmi možno žiakom rozdať dresy, ak Janko má mať dres s číslom o 1 väčším ako Marienka?

c) Koľkými spôsobmi možno rozdeliť žiakov na tri tímy: postupne po 9, 9 a 10 žiakov. Formálne, koľko je rozkladov množiny žiakov na triedy veľkosti 9, 9 a 10?

d) Koľkými spôsobmi možno vybrať 10-členný tím (teda množinu) žiakov tak, aby obsahoval aspoň jedného zo žiakov: Boris, Olívia, Róberta, Elena, Cyril.

e) Koľkými spôsobmi možno zo žiakov vybrať dva 5-členné tímy, z ktorých jeden obsahuje tri dievčatá a druhý dve. Pod výberom tímov rozumieme množinu $\{X, Y\}$, kde X a Y sú 5-prvkové množiny žiakov s uvedenou vlastnosťou.

Riešenie podúloh a), b) spíšte poriadne formálne. Riešenie by malo obsahovať formálny opis, ako vyzerá množina všetkých možností, a určenie počtu jej prvkov podľa viet z prednášok. Pri úlohách c), d), e) stačí neformálne zdôvodnenie, prečo je váš výsledok správny.

Riešenie. Vo všetkých riešeniach budeme označovať $\check{Z}$ množinu žiakov a C, D postupne množiny chlapcov a dievčat.

a) Keďže nám záleží na poradí, tak hľadané možnosti vieme vyjadriť ako množinu 7-členných postupností prvkov množiny $\check{Z}$, ktoré obsahujú (U, K, T, G) ako súvislú podpostupnosť. Túto množinu označíme M. Množinu M rozložíme podľa toho, na ktorej pozícii sa začína podpostupnosť (U, K, T, G).

$$M_1 = \{U\} \times \{K\} \times \{T\} \times \{G\} \times Z^3 \qquad |M_1| = |\{U\}| \cdot |\{K\}| \cdot |\{T\}| \cdot |\{G\}| \cdot |Z|^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 28^3 = 28^3,$$
$$M_2 = Z \times \{U\} \times \{K\} \times \{T\} \times \{G\} \times Z^2, |M_2| = |Z| \cdot |\{U\}| \cdot |\{K\}| \cdot |\{T\}| \cdot |\{G\}| \cdot |Z|^2 = 28 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 28^2 = 28^3$$
$$M_3 = Z^2 \times \{U\} \times \{K\} \times \{T\} \times \{G\} \times Z, |M_3| = |Z|^2 \cdot |\{U\}| \cdot |\{K\}| \cdot |\{T\}| \cdot |\{G\}| \cdot |Z| = 28^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 28 = 28^3,$$
$$M_4 = Z^3 \times \{U\} \times \{K\} \times \{T\} \times \{G\}, \qquad |M_4| = |Z|^3 \cdot |\{U\}| \cdot |\{K\}| \cdot |\{T\}| \cdot |\{G\}| = 28^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 28^3.$$

Keďže každá postupnosť z množiny M môže obsahovať najviac jednu súvislú podpostupnosť (U, K, T, G), tak množiny M_1, M_2, M_3 a M_4 sú navzájom disjunktné. Preto podľa pravidla súčtu platí

$$|M| = |M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| = 28^3 + 28^3 + 28^3 + 28^3 = 4 \cdot 28^3.$$

b) Dresy budeme reprezentovať číslami od 1 po 99. Hľadané rozdelenia dresov možno reprezentovať ako množinu

$$N = \{f \in \{1, 2, \ldots, 99\}^Z;\ f \text{ je injektívne } \wedge f(J) = f(M) + 1\}.$$

Teda N je množina injektívnych zobrazení $f \colon Z \to \{1, 2, \ldots, 99\}$, pre ktoré platí $f(J) = f(M) + 1$.

Nech ďalej

$$N_i = \{f \in N;\ f(M) = i\}, \qquad \text{pre } i \in \{1, 2, \ldots, 98\}$$

je množina tých zobrazení z N, v ktorých dostane Marienka dres i. Pre každé zobrazenie $f \in N_i$ musí platiť $f(J) = i + 1$. Preto zjavne platí

$$|N_i| = |\{f \in (\{1, 2, \ldots, 99\} - \{i, i+1\})^{Z - \{J,M\}};\ f \text{ je injektívne}\}| = |\{1, 2, \ldots, 99\} - \{i, i+1\}|^{\underline{|Z - \{J,M\}|}} = 97^{\underline{26}},$$

pričom sme využili vetu o počte injektívnych zobrazení (variáciách bez opakovania).

Množiny N_i sú zjavne disjunktné (zobrazenia z rôznych množín majú rôznu hodnotu $f(M)$), môžeme nájsť počet prvkov N podľa pravidla súčtu ako

$$|N| = \left|\bigcup_{i=1}^{98} N_i\right| = \sum_{i=2}^{99} |N_i| = \sum_{i=2}^{99} 97^{\underline{26}} = 98 \cdot 97^{\underline{26}} = 98^{\underline{27}}.$$

Riešenie b) cez zovšeobecnené pravidlo súčinu Množinu možností vyjadríme ako

$$N = \{(i, f);\ i \in \{1, 2, \ldots, 98\} \wedge f \text{ je injeckia z } Z - \{J, M\} \text{ do } \{1, 2, \ldots, 99\} - \{i, i+1\}\}.$$

Prvok (i, f) pritom reprezentuje možnosť, kedy Marienka dostane dres i, Janko dostane dres $i+1$ a každý zo zvyšných žiakov z dostane dres $f(z)$. Platí $|\{1, 2, \ldots, 98\}| = 98$ a počet injekcií z $Z - \{J, M\}\}$ do $\{1, 2, \ldots, 99\} - \{i, i+1\}$ je $97^{\underline{26}}$ pre každú voľbu i podľa vety o variáciách bez opakovania. Preto podľa zovšeobecneného pravidla súčinu platí $|N| = 98 \cdot 97^{\underline{26}} = 98^{\underline{27}}$.

c) Najprv vyberieme prvý 9-členný tím A z 28 žiakov, čo vieme spraviť $\binom{28}{9}$ spôsobmi. Zo zvyšných $28-9 = 19$ žiakov vyberieme druhý 9 členný tím B, na čo máme $\binom{19}{9}$ možností. Tak nám ostane jednoznačne určený 10-členný tím C. Takto sme dostali rozdelenie tímov $\{A, B, C\}$. Každé takéto rozdelenie vieme dostať práve dvomi spôsobmi: 10-členný tím sme museli isto vybrať v treťom kroku, no dva 9-členné sme mohli vybrať dvomi spôsobmi v prvých dvoch výberoch. Preto počet spôsobov je

$$\frac{1}{2}\binom{28}{9}\binom{19}{9}.$$

d) Všetkých možností, ako vybrať 10-členný tím je $\binom{28}{10}$. „Zlých“ možností, kedy 10-členný tím neobsahuje žiadneho z 5 vyžadovaných žiakov, je $\binom{23}{10}$. Preto hľadaný počet možností je

$$\binom{28}{10} - \binom{23}{10}.$$

e) Tím s tromi dievčatami dostaneme tak, že najprv vyberieme tri dievčatá ($\binom{14}{3}$ spôsobov) a k nim vyberieme dvoch chlapcov ($\binom{14}{2}$ spôsobov). Do druhého tímy vyberieme dve zo zvyšných 11 dievčat ($\binom{11}{2}$ spôsobov), ku ktorým vyberieme troch zo zvyšných 12 chlapcov ($\binom{12}{3}$ spôsobov). Takto dostaneme každé rozdelenie práve raz, nakoľko tímy vieme rozlíšiť počtom dievčat. Preto je počet možných výberov

$$\binom{14}{3}\binom{14}{2}\binom{11}{2}\binom{12}{3}.$$

□

Úloha 2. *(2 body)* Vypočítajte sumu v závislosti od nezáporných celých čísel m, n:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k+1}\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}.$$

Riešenie.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k+1}\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k+1}\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(m-k)!}{(n-k)!(m-n)!} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} 3^k \frac{m!}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{(n-k)!(m-n)!} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} 3^k \frac{m!}{(n+1)!(m-n)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{n+1}\binom{m}{n}\binom{n+1}{k+1} = \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{m}{n}\sum_{k=0}^{n} 3^k\binom{n+1}{k+1} = \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{m}{n}\sum_{l=1}^{n+1} 3^{l-1}\binom{n+1}{l} = \\
&= \frac{1}{3(n+1)}\binom{m}{n}\sum_{l=1}^{n+1} 3^{l}\binom{n+1}{l} = \\
&= \frac{1}{3n+3}\binom{m}{n}\left(\sum_{l=0}^{n+1} 3^{l}\binom{n+1}{l} - 1\right) = \qquad \mid \text{Binomická veta} \\
&= \frac{1}{3n+3}\binom{m}{n}\left((1+3)^{n+1}-1\right) = \\
&= \frac{4^{n+1}-1}{3n+3}\binom{m}{n}.
\end{aligned}$$

□

Úloha 3. *(BONUS, 2 body)* Vypočítajte sumu v závislosti od nezáporných celých čísel n, k:

$$\sum_{i=k}^{n} i\binom{i}{k}.$$

Riešenie. Najskôr ukážeme, že pre každé nezáporné celé čísla n, k platí

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{1}$$

Dôkaz spravíme matematickou indukciou n. Pre $n < k$ rovnosť (1) triviálne platí a pre $n = k$ máme $1 = 1$. Uvažujme teraz nejaké $n \in \mathbb{N}$ platí (1). Potom pre $n = 1$ máme

$$\sum_{i=k}^{n+1}\binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} + \binom{n+1}{k} \overset{\text{(IP)}}{=} \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1},$$

čím je indukčný krok dokázaný.

Teraz sa vrátime k pôvodnej sume:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} i\binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n}(i+1-1)\binom{i}{k} = \\
&= \sum_{i=k}^{n}(i+1)\binom{i}{k} - \sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \\
&= \sum_{i=k}^{n}(i+1)\frac{i!}{k!(i-k)!} - \sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \\
&= \sum_{i=k}^{n}(k+1)\frac{i+1!}{(k+1)!(i-k)!} - \sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \\
&=(k+1)\sum_{i=k}^{n}\binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=}(k+1)\binom{n+2}{k+2} - \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Riešenie cez kombinatorickú úvahu.

Zadanie úlohy Uvažujme nasledovnú kombinatorickú úlohu: Máme športový klub, ktorého hráči sú očíslovaní číslami $1, 2, \ldots, n+1$ od najmladšieho po najstaršieho. Z hráčov treba vybrať $(k+1)$-členný tím (podmnožinu) spolu s kapitánom. Kapitán môže, ale nemusí byť súčasťou tímu, no v tíme musí existovať niekto starší ako on.

1. riešenie Možné výbery tímov rozdelíme na po dvoch disjunktné množiny. Pre $i \in \{k, k+1, \ldots, n\}$ uvažujme množinu M_1, ktorá obsahuje výbery tímov, kde je hráč $i+1$ najstarší. Každý takýto tím potrebuje ešte vybrať k hráčov, ktorí musia byť vybraní spomedzi hráčov $\{1, 2, \ldots, i\}$, na čo máme $\binom{i}{k}$ možností. Potom ešte musíme určiť kapitána – ním môže byť ktokoľvek s menším číslom ako $i+1$, na čo máme i možností. Spolu teda máme

$$\sum_{i=k}^{n} i\binom{i}{k} \qquad \text{možností.}$$

2. riešenie Najprv vyčíslime možnosti, kedy je kapitán súčasťou tímu. Vtedy máme $\binom{n+1}{k+1}$ možností na výber ľudí v tíme. Pre kapitána máme len k možností, keďže ním nemôže byť najstarší hráč. Spolu tu teda máme $k\binom{n+1}{k+1}$ možností.

Ak kapitán nie je súčasťou tímu, tak máme $\binom{n+1}{k+2}$ možností ako vybrať hráčov, čo budú tvoriť tím a kapitána. Potom máme $k+1$ spôsobov ako určiť hráča, ktorý nepôjde do tímu a bude kapitánom – opäť nemôžeme zvoliť najstaršieho. V tomto prípade máme $(k+1)\binom{n+1}{k+1}$.

Výsledný počet možností, a teda aj výsledok našej sumy, teda je

$$\binom{n+1}{k+2} + (k+1)\binom{n+1}{k+1}.$$

□

Úloha 4. *(BONUS, 2 body)* Máme sadu n závaží s hmotnosťami $1!$ kg, $2!$ kg, $3!$ kg, …, $n!$ kg. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko rôznych hmotností vieme pomocou nich odvážiť na rovnoramenných váhach? Závažia môžeme dávať na obe strany. Správnosť vášho výsledku dokážte.

Riešenie. Podrobné riešenie úlohy spolu s lepším vysvetlením, ako naň prísť a a aj iným riešením môžete nájsť na `https://old.kms.sk/docs/vzoraky/20152016/let/seria3.pdf` ako riešenie úlohy 4.

Na začiatok si ujasníme, čo znamená, že vieme odvážiť nejakú hmotnosť. Odvážiť hmotnosť $m \in \mathbb{N}^+$ vieme práve vtedy, keď existujú dve disjunktné podmnožiny závaží A, B, pre ktoré platí $m = \sum_{a\in A} a - \sum_{b\in B} b$.

Teda, že rozložíme závažia na dve strany váhy, aby rozdiel ich hmotností bol m. Do tejto definície by sme vedeli zahrnúť aj hmotnosť 0 kg, lebo stačí zvoliť $A = B = \emptyset$. To korešponduje tomu, že ak máme predmet s hmotnosťou 0 kg, tak jeho umiestnením na jednu misku váha ostane v rovnováhe, čím zistíme jeho hmotnosť. Keďže však takto niekto pri riešení neuvažoval, tak nulu do našej definície nezahrnieme.

Na začiatok dokážeme matematickou indukciou podľa n ukážeme, že pre všetky $n \geq 3$ platí

$$2(n! + \cdots + 2! + 1!) < (n+1)!. \tag{2}$$

Pre $n = 4$ platí $24 = 4! > 18 = 2 \cdot (3! + 2! + 1!)$. Predpokladajme, že (2) platí pre nejaké n potom

$$2((n+1)! + n! + \cdots + 2! + 1!) \overset{\text{(IP)}}{<} 2(n+1)! + (n+1)! = 3(n+1)! < (n+2)(n+1)! = (n+2)!,$$

čím je dôkaz indukciou hotový.

Označme $p(n)$ počet hmotností, ktoré možno odvážiť so závažiami hmotností $1!, 2!, \ldots, n!$. Zjavne

- $p(1) = 1$, lebo vieme zjavne odvážiť len 1 kg;
- $p(2) = 3$, lebo vieme odvážiť $1 = 1!$, $2 = 2!$ a $3 = 1! + 2!$ (väčšie hmotnosti zjavne nejdú);
- $p(3) = 9$, lebo vieme odvážiť $1 = 1!$, $2 = 2!$, $3 = 3!$, $4 = 1! + 3!$, $5 = 2! + 3!$, $6 = 3!$, $7 = 3! + 1!$, $8 = 3! + 2!$ a $9 = 3! + 2! + 1!$ (väčšie hmotnosti zjavne nejdú).

Nech $n \geq 3$. Pri pridaní nového závažia $(n+1)!$ kg vieme odvážiť hmotnosti:

(i) Všetkých $p(n)$ hmotností, ktoré vieme odvážiť bez závažia $(n+1)!$ kg. Najväčšia z nich je $1! + 2! + \cdots + n!$.

(ii) Všetkých $p(n)$ hmotností, ktoré vieme dostať odčítaním pôvodných od $(n+1)!$. Najmenšia z nich je $(n+1)! - (1! + 2! + \cdots + n!)$.

(iii) Všetkých $p(n)$ hmotností, ktoré dostaneme pričítaním pôvodných hmotností k $(n+1)!$.

(iv) Hmotnosť $(n+1)!$.

Hmotnosti z prípadov (i) a (ii) sú vďaka (2) disjunktné. Všetky možnosti z prípadu (iii) sú väčšie ako hmotnosti z (i) a (ii) a hmotnosť z (iv) je tiež rôzna od všetkých. Teda pre $n \geq 3$ platí

$$p(n+1) = 3p(n) + 1.$$

Matematickou indukciou dokážeme, že pre $n \geq 3$ platí

$$p(n) = 3^{n-1} + \frac{3^{n-3} - 1}{2}.$$

Pre $n = 3$ máme $p(3) = 9 = 3^2 + \frac{3^0 - 1}{2}$. Nech pre nejaké n platí $p(n) = 3^{n-1} + \frac{3^{n-3}-1}{2}$. Potom

$$p(n+1) = 3p(n) + 1 = 3^n + \frac{3^{n-2} - 3}{2} + 1 = 3^n + \frac{3^{n-2} - 1}{2}.$$

Tým je dôkaz indukciou ukončený a rovnako aj riešenie tejto úlohy.

□