

Sada domácich úloh z UKTG č. 2

Termín: štvrtok 31. 3. 2022, 23:59

Riešenie odovzdajte ako **jeden pdf súbor** cez MS Teams. Súbor pomenujte vašim priezviskom: priezvisko.pdf.

Úloha 1. ($1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ bodov) Hodiny telesnej výchovy sa účastní 28 (rozlíšiteľných) žiakov: 14 dievčat a 14 chlapcov.

- Počas futbalového zápasu padlo 7 gólov. Koľko je možností, ako mohli žiaci streliť góly, ak Uršuľa, Karol, Terka a Gustáv strelili v tomto poradí štyri za sebou idúce góly? (Pritom nám zaleží na poradí a jeden žiak mohol streliť aj viac gólov.)
- V kabinete sú dresy s číslami od 1 po 99, každý práve raz. Koľkými spôsobmi možno žiakom rozdať dresy, ak Janko má mať dres s číslom o 1 väčším ako Marienka?
- Koľkými spôsobmi možno rozdeliť žiakov na tri tímy: postupne po 9, 9 a 10 žiakov. Formálne, koľko je rozkladov množiny žiakov na triedy veľkosti 9, 9 a 10?
- Koľkými spôsobmi možno vybrať 10-členný tím (teda množinu) žiakov tak, aby obsahoval aspoň jedného zo žiakov: Boris, Olívia, Róberta, Elena, Cyril.
- Koľkými spôsobmi možno zo žiakov vybrať dva 5-členné tímy, z ktorých jeden obsahuje tri dievčatá a druhý dve. Pod výberom tímov rozumieme množinu $\{X, Y\}$, kde X a Y sú 5-prvkové množiny žiakov s uvedenou vlastnosťou.

Riešenie podúloh a), b) spíšte poriadne formálne. Riešenie by malo obsahovať formálny opis, ako vyzerá množina všetkých možností, a určenie počtu jej prvkov podľa viet z prednášok. Pri úlohách c), d), e) stačí neformálne zdôvodnenie, prečo je váš výsledok správny.

Úloha 2. (2 body) Vypočítajte sumu v závislosti od nezáporných celých čísel m, n :

$$\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k+1} \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k}.$$

Úloha 3. (BONUS, 2 body) Vypočítajte sumu v závislosti od nezáporných celých čísel n, k :

$$\sum_{i=k}^n i \binom{i}{k}.$$

Úloha 4. (BONUS, 2 body) Máme sadu n závaží s hmotnosťami $1!$ kg, $2!$ kg, $3!$ kg, \dots , $n!$ kg. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko rôznych hmotností vieme pomocou nich odvážiť na rovnoramenných váhach? Závažia môžeme dávať na obe strany. Správnosť vášho výsledku dokážte.