Sada domácich úloh z UKTG č. 3

Termín: štvrtok 12. 5. 2022, 23:59

Úloha 1. *(3 body)* V závislosti od nezáporných celých čísel c, s určte, koľko existuje c-ciferných čísel s ciferným súčtom s. Výsledok môžete uviesť v tvare jednej sumy.

Poznámka. Ak sa Vám úloha zdá ťažká, odporúčam vyskúšať si ju vyriešiť pre malé konkrétne hodnoty c, s. Vhodnými kandidátmi na začiatok sú napr. $c = 5$, $s = 8$ a $c = 7$, $s = 24$.

Riešenie. Počet c-ciferných čísel s ciferným súčtom s je zjavne rovný počtu riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_c = s, \qquad \text{kde } 1 \leq x_1 \leq 9 \wedge \forall i \in \{2, \ldots, c\}\colon 0 \leq x_i \leq 9. \tag{1}$$

Nech M je množina riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_c = s \quad \text{v obore } \mathbb{N}, \quad \text{kde } x_1 \geq 1 \tag{2}$$

a nech M_i obsahuje také riešenia z M, v ktorých $x_i \geq 10$. Hľadaný počet riešení rovnice (1) je tak $|M_1^C \cap M_2^C \cap \cdots \cap M_c^C|$. Ten vypočítame podľa Dôsledku 3.21 princípu inklúzie a exklúzie

$$|M_1^C \cap M_2^C \cap \cdots \cap M_c^C| = \sum_{k=0}^{c} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq c} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}|.$$

Množina $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}$ obsahuje riešenia rovnice (2), v ktorých majú premenné $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ hodnotu aspoň 10. Ich počet zistíme ako počet rozdelení s guličiek medzi c chlievikov, kde v chlievikoch s poradovými číslami $i_1, i_2, \ldots, i_k$ je aspoň 10 guličiek.

- Ak $i_1 = 1$, tak do chlievikov $i_1, i_2, \ldots, i_k$ umiestnime po 10 guličiek. Ostane nám ešte rozdeliť $s - 10k$ guličiek do c chlievikov. Tieto rozdelenia vieme reprezentovať ako reťazec $s - 10k$ guličiek a $c - 1$ oddeľovačov, ktoré nám oddeľujú c chlievikov. Dostávame tak $\binom{s-10k+c-1}{c-1}$ možností.
- Ak $i_1 > 1$ (teda aj ostané i-čka sú väčšie ako 1), tak do chlievikov $i_1, i_2, \ldots, i_k$ umiestnime po 10 guličiek a do chlieviku 1 umiestnime jednu guličku. Ostane nám rozdeliť $s - 10k - 1$ guličiek, na čo máme, analogicky ako v predošlom prípade, $\binom{s-10k+c-2}{c-1}$ možností.

Teraz dokončíme výpočet

$$\begin{aligned}
&|M_1^C \cap M_2^C \cap \cdots \cap M_c^C| = \\
&= \sum_{k=0}^{c} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq c} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}| = \\
&= \sum_{k=0}^{c} (-1)^k \left(\sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_k \leq c} |M_1 \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}| + \sum_{2 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq c} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}| \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{c} (-1)^k \left(\sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_k \leq c} \binom{s-10k+c-1}{c-1} + \sum_{2 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq c} \binom{s-10k+c-2}{c-1} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{c} (-1)^k \left(\binom{c-1}{k-1} \binom{s-10k+c-1}{c-1} + \binom{c-1}{k} \binom{s-10k+c-2}{c-1} \right).
\end{aligned}$$

□

Úloha 2. *(2 body)* Uvažujme funkciu $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ danú predpisom

$$f(n) = \frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2}.$$

Rozhodnite, či platí

a) $f(n) = \Theta(n^{-1})$,

b) $f(n) = \Theta(n^{-2})$,

c) $f(n) = o(n^{-2})$,

d) $f(n) = \omega(n^{-2})$.

Všetky vaše tvrdenia formálne dokážte. Vychádzajte pri tom len z definícií (čiže bez odvolávania sa na tvrdenia o asymptotike z prednášky či cvičení). Nech neriešite problémy s $n = 0$ v definíciách z prednášky môžete nahradiť $\mathbb{N}$ bez problémov za $\mathbb{N}^+$.

Riešenie. Najskôr ukážeme, že $f(n) \geq 0$ pre všetky $n \geq 15$. Totiž platí

$$f(n) = \frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2} = \frac{n-15}{5n^2},$$

čo je nezáporné pre $n \geq 15$.

a) platí Ukážeme, že $f(n) = O(n^{-1})$. Pre všetky $n \geq 15$ platí

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2}\right| \overset{n\geq 15}{=} \frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2} \overset{3/n^2>0}{<} \frac{1}{5n} < \frac{1}{n}.$$

$$\text{Teda} \qquad |f(n)| < 1 \cdot \left|\frac{1}{n}\right|, \qquad \forall n \geq 15.$$

Ukážeme, že platí $f(n) = \Omega(n^{-1})$. Pre všetky $n \geq 30$ platí:

$$\begin{aligned}
n &\geq 30, && \mid +n-30 \\
2n - 30 &\geq n, && \mid \cdot \frac{1}{10n^2} \\
\frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2} &\geq \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{n}, && \mid \frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2} \geq 0 \text{ pre } n \geq 30 \\
\left|\frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2}\right| &\geq \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{n}, \\
\text{prípadne vieme dostať aj tvar,} \qquad \frac{1}{n} &\leq 10|f(n)|.
\end{aligned}$$

Keďže platí $f(n) = O(n^{-1})$ aj $f(n) = \Omega(n^{-1})$, tak $f(n) = \Theta(n^{-1})$.

b) neplatí Ukážeme, že $f(n) \neq O(n^{-2})$. Pre spor predpokladajme $f(n) = O(n^2)$, teda existujú $c \in \mathbb{R}^+$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $|f(n)| \leq c \cdot n^{-2}$ pre všetky $n \geq n_0$. Potom aj pre všetky $n \geq \max(15, n_0)$ platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2}\right| &\leq c \cdot \frac{1}{n^2}, \\
\frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2} &\leq c \cdot \frac{1}{n^2}, && \mid \cdot 5n^2 \\
n - 15 &\leq 5c, && \text{pre všetky } n \geq \max(15, n_0).
\end{aligned}$$

Toto však hovorí, že $n - 15$ je ohraničená funkcia, čo nie je pravda. Máme tak spor.

c) nepaltí Vypočítajme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{n^{-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2}}{n^{-2}} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (5n - 3) = \infty \neq 0.$$

Preto $f(n) \neq o(n^{-2})$.

d) platí Po prevrátení limity z predošlej podúlohy máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2}}{|f(n)|} = 0,$$

teda $f(n) = \omega(n^{-2})$. □

Úloha 3. *(2 body)* Na večierku sa stretlo $3n - 1$ ľudí, $n \in \mathbb{N}^+$. Niektoré dvojice ľudí sa medzi sebou poznajú (vzťah poznať sa je symetrický). Dokážte, že v každej takejto situácii existuje n navzájom disjunktných párov s vlastnosťou, že buď sa všetky páry medzi sebou poznajú, alebo sa žiaden z párov medzi sebou nepozná.

Riešenie. Situáciu na večierku si vieme reprezentovať ako graf, ktorého vrcholy sú ľudia z večierku a hranou spájame tých, ktorí sa poznajú. Máme ukázať, že existuje množina dvojíc vrcholov, z ktorých je buď každá, alebo žiadna spojená hranou. Takúto množinu hrán nazveme *páriky.* Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n. Pre $n = 1$ máme graf s $3n - 1 = 2$ vrcholmi. Tie tvoria vyhovujúci pár aj keď sú, aj keď nie sú spojené hranou.

Predpokladajme, že pre nejaké n platí, že každý graf s $3n-1$ vrcholmi obsahuje páriky. Tvrdenie teraz dokážeme pre každý graf G s $3(n+1) - 1 = 3n + 2$ vrcholmi.

- Ak G má všetky vrcholy stupňa 0, tak nemá žiadne hrany a tak ľubovoľných n disjunktných párov vrcholov vytvorí páriky.
- Ak G má všetky vrcholy stupňa $3n + 1$, tak ide o úplný graf a taktiež ľubovoľných n disjunktných párov vrcholov vytvorí páriky.
- Ak by G obsahoval len vrcholy stupňov 0 a $3n+1$ (ktoré nemôžu byť v grafe naraz), tak musí ísť o jeden z vyššie vyriešených prípadov. Preto existuje vrchol u so stupňom iným od 0 a $3n+1$. K nemu teda existujú vrcholy v a w také, že $uv \in E(G)$ a $uw \notin E(G)$. Graf $G - \{u, v, w\}$ má $3n+2-3 = 3n-1$ vrcholov, a preto podľa indukčného predpokladu obsahuje páriky. Ak páriky pozostávajú z párov spojených hranami, tak pridaním páru uv dostaneme páriky v grafe G. V opačnom prípade dostaneme páriky grafu G pridaním páru uw.

□

Poznámka. Množina navzájom disjunktných hrán sa v grafe nazýva *párenie.* Tvrdenie tak možno sformulovať tak, že pre každý graf G s $3n + 1$ vrholmi platí, že G alebo jeho komplement obsahuje párenie s n hranami.